Geometria 27/3/14

Recupero ore: 3/4 12:30-13:30 F3

8/4 13:30-15:30 A21

Visto: $f: V \to V$ lin $(A \in M_{n \times n})$

$p_f(t) = t^n - tr(f) \cdot t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \cdot \det(f)$.

Ora se p_f ha radici $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $\mathbb{C}$ con molt.

si ha $p_f(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$
$$= t^n - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\,t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

$\Rightarrow$

somma radici di $p_f(t) = \mathrm{tr}(f)$
prodotto radici di $p_f(t) = \det(f)$.

Teor: spettrale / $\mathbb{R}$:

A simmetrica $\Leftrightarrow$ $\exists M$ t.c. ${}^tM = M^{-1}$ (ortog.)
e ${}^tM \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Richiamo: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ con derivate II continue

$\bar{x} \in \Omega$

$$\Rightarrow f(\bar{x}+t) = f(\bar{x}) + \langle \operatorname{grad}_{\bar{x}} f \,|\, t \rangle + \frac{1}{2} \underbrace{\langle t | t \rangle_{H_{\bar{x}}(f)}}_{\substack{\shortparallel \\ \lambda_1 t_1^2 + \dots + \lambda_n t_n^2}} + o(\|t\|^2)$$

dopo un opportuno cambiamento isometrico di coordinate dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autoval di $H_{\bar{x}}(f)$

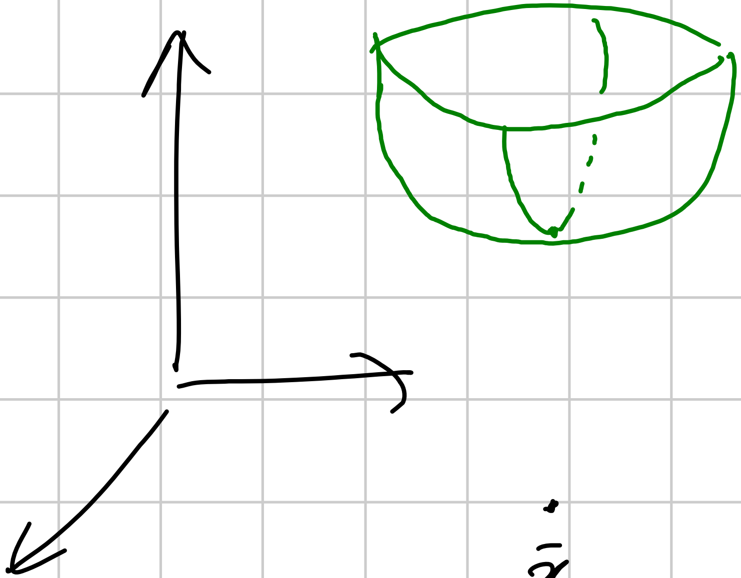
Conseguenza:

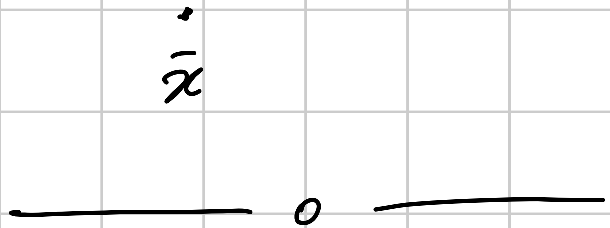
$\bar{x}$ min. loc $\Longrightarrow \mathrm{grad}_{\bar{x}} f = 0, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$

$\mathrm{grad}_{\bar{x}} f = 0, \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0 \Longrightarrow \bar{x}$ min loc.

(infatti dopo cambio coord

$f(\bar{x}+t) = f(\bar{x}) + \lambda_1 t_1^2 + \dots + \lambda_n t_n^2 + o(\|t\|^2))$





Teorema spettrale su $\mathbb{C}$:

Def: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ si dice normale se

$$A^* \cdot A = A \cdot A^*$$

Esempi di normali:

- hermitiane ($A^* = A$)
  (in part. simmetriche reali)
- antihermitiane ($A^* = -A$)
  (in part. antisimmetriche reali)

anche altre!

• unitarie ($A^* = A^{-1}$)
(in part. ortogonali reali)

<u>Teo</u>: A normale $\Longleftrightarrow$ si diagonalizza tramite una matrice unitaria

cioè: $\exists M$ t.c. $M^* = M^{-1}$
e $M^* \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

<u>Dimo</u>: $\Longleftarrow$ (poco interessante)

Se $\exists M$ con $\underline{\underline{M^* = M^{-1}}}$ e $M^* \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad A = M \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot M^*$$

$$A^* = M \cdot \begin{pmatrix} \bar\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar\lambda_n \end{pmatrix} \cdot M^* \quad ;$$

$$A^* \cdot A = M \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \underbrace{M^* M}_{I_n} \begin{pmatrix} \bar\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar\lambda_n \end{pmatrix} M^* = M \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} M^*$$

$$A \cdot A^* = M \begin{pmatrix} \bar\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar\lambda_n \end{pmatrix} \underbrace{M^* M}_{I_n} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} M^* =$$

<u>OK</u>

$\Rightarrow$: Per induzione : $n=1$ ✓

Scelto un autovalore λ_1 produco una unitaria M_1 t.c.

$$M_1^* \cdot A \cdot M_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$(M_1^* = M_1^{-1})$.

$$\Rightarrow \quad A = M_1 \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t b \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \cdot M_1^*$$

$$A^* = M_1 \cdot \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ \bar{b} & A_1^* \end{pmatrix} \cdot M_1^*.$$

So che $A^* \cdot A = A \cdot A^*$, dunque

$$\cancel{M_1}\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ \bar{b} & A_1^* \end{pmatrix}\underbrace{M_1^* M_1}_{I_n}\begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t b \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\cancel{M_1^*} = \cancel{M_1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t b \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\underbrace{M_1^* \cdot M_1}_{I_n}\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ \bar{b} & A_1^* \end{pmatrix}\cancel{M_1^*}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & \dots \\ \dots & \bar{b} \cdot {}^t b + A_1^* A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 + \|b\|^2 & \dots \\ \dots & A_1 A_1^* \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow b = 0$, $A_1^* A_1 = A_1 A_1^*$ – Morale:

trovata M_1 unitaria t.c.

$$M_1^* A M_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

con A_1 normale

Si conclude per induzione come nel caso reale. $\blacksquare$

Q: Per quali A hermitiane

$\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos.?

Oss! Se A è hermitiana allora ha autoval. reali:

Scelgo λ autoval. $z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$ autovettore

$$\begin{array}{c} \langle A\cdot z | z \rangle = \langle \lambda z | z \rangle = \lambda \|z\|^2 \\ \| \\ \langle z | A^* z \rangle = \langle z | A z \rangle = \langle z | \lambda z \rangle = \bar{\lambda} \cdot \|z\|^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} .$$

Teo: Se A è hermitiana sono fatti equiv:

•) $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos.

•) gli autoval di A sono positivi

•) ogni $d_j = \det \left(\underbrace{\begin{array}{ccc|c} \cdots & & & \\ \vdots & & & \\ \cdots & & & \\ \hline & & & \end{array}}_{j} \right) \Big\} j$ è positivo
$j = 1, \ldots, n$.

(Dimo: come nel caso reale.)

Prop: Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$; allora:

- A hermitiana (in particolare, A simm. reale) $\Rightarrow$ autovalori reali

- A antihermitiana (in part., A antisimm. reale)
  $\Rightarrow$ autovalori imm puri
- A unitaria (in part. A ortog. reale)
  $\Rightarrow$ ha autoval di modulo $\underline{1}$.

<u>Dimo:</u> hermitiana: visto.

antihermitiana: $A \cdot z = \lambda \cdot z$

$$\langle Az | z \rangle = \langle \lambda z | z \rangle = \lambda \cdot \|z\|^2$$

$$\|$$

$$\langle z | A^* z \rangle = \langle z | -Az \rangle = \langle z | -\lambda z \rangle = -\bar{\lambda} \|z\|^2$$

$$\Longrightarrow \bar{\lambda} = -\lambda \Rightarrow \lambda \in i \cdot \mathbb{R}$$

unitarie: $Az = \lambda \cdot z$

$$\begin{array}{c} \|Az\| = \|\lambda \cdot z\| = |\lambda| \cdot \|z\| \\ \| \\ \|z\| \end{array} \Longrightarrow |\lambda| = 1 . \qquad \blacksquare$$

<u>Cor</u>: A hermitiana $\Longrightarrow \exists M$ unitaria t.c.

$$M^* \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

A antihermitiana $\Longrightarrow \exists M$ unitaria t.c.

$$M^* \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} it_1 & & \\ & \ddots & \\ & & it_n \end{pmatrix} \quad t_j \in \mathbb{R}$$

A unitaria $\Rightarrow \exists M$ unitaria t.c.

$$M^* \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} e^{i\vartheta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\vartheta_n} \end{pmatrix}, \quad \vartheta_j \in \mathbb{R}.$$

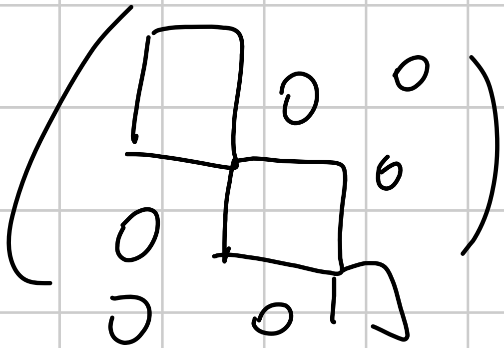
Forme canoniche reali di matrici ortogonali e antisimmetriche:

<u>Teo</u>: •) Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ortogonale (isometria)

allora esiste B ortogonale t.c.

${}^tB \cdot A \cdot B$ è diagonale a blocchi

con blocchi o



1×1 $\quad \boxed{1}$ o $\boxed{-1}$

2×2 $\quad \boxed{\begin{matrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{matrix}}$

($\Longrightarrow$ ogni isometria di $\mathbb{R}^n$ in un sistema opportuno di coordinate ortogonali... è composizione di riflessioni rispetto a iperpiani coordinati e rotazioni intorno a sottosp. coord di codim. 2) _

∘) Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ antisimmetrica esiste B ortogonale t.c.

${}^tB \cdot A \cdot B$ è diag. a blocchi $\begin{pmatrix} \square & & 0 \\ 0 & \square & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

con blocchi 1×1 $\boxed{0}$

o 2×2 $\boxed{\begin{matrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{matrix}}$

<u>Cor</u>: $n=3$

A ortog. $\Rightarrow \exists B$ ortog t.c.

$$ {}^tBAB \text{ è } \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \pm 1 & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} $$

A antisimm $\Rightarrow$ $\exists B$ ortog t.c.

${}^tBAB$ è $\begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Esercizio</u>: provare che $A \in M_{3\times 3}$ antisimm

direttamente

$\Rightarrow \det(A) = 0$ _

<u>Idea dim</u>: A ortog. $\Rightarrow$ ha autoval di

modulo 1 $\Rightarrow$ ± 1 o $e^{i\vartheta}$

blocchi 1×1

blocchi 2×2 :

Prendo autovettore $x+iy \in \mathbb{C}^n$ per $e^{-i\theta}$

$$A \cdot (x+iy) = (\cos\theta - i \cdot \sin\theta) \cdot (x+iy)$$

Fatto generale :

se $p(t) \in \mathbb{R}[t]$

ha radice $z \in \mathbb{C}$ allora ha anche radice $\bar{z}$

$\Rightarrow$ se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ha autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$, allora ha autovalore $\bar{\lambda}$.

$$A \cdot (x+iy) = (\cos\vartheta - i \cdot \sin\vartheta) \cdot (x+iy)$$

$$\begin{cases} A \cdot x = \cos\vartheta \cdot x + \sin\vartheta \cdot y \\ A \cdot y = -\sin\vartheta \cdot x + \cos\vartheta \cdot y \end{cases}$$

$$[A]_{(x,y)}^{(x,y)} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Quindi $x-iy$ è autovett. rispetto a $e^{i\vartheta}$

$\Rightarrow$ (per teo spettrale complesso)

$$\langle x+iy \mid x-iy \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0$$

$$\|$$

$$\|x\|^2 + i\langle y|x\rangle_{\mathbb{R}^n} + i\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^n} - \|y\|^2$$

$\Rightarrow \|x\|^2 = \|y\|^2 , \quad x \perp y$

$\Rightarrow$ a meno di normalizzare (x, y)

è una base ortonormale.

A antisimmetrica: autovalore it

autovettore complesso $x + iy$

$$A \cdot (x+iy) = it\,(x+iy)$$

$$\begin{cases} Ax = -t \cdot y \\ Ay = tx \end{cases} \Rightarrow [A]^{(x,y)}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

(15) ortonormalizzare

(c) $\langle x|y\rangle \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2^2 - 2\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{3\cdot 2\cdot(-1) - 1\cdot 2\cdot 5 - 1\cdot 3\cdot(-1) + 2\cdot 3\cdot 5}{18} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -52 \\ 39 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3\cdot 52^2 - 2\cdot(-52)\cdot 39 + 2\cdot 39^2}}\begin{pmatrix} -52 \\ 39 \end{pmatrix}$$

(e) $\langle x | y \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{1\cdot 2^2 + 5\cdot 1^2 + 3\cdot 3^2 + 4\cdot 2\cdot 1 + 0\cdot 2\cdot 3 - 2\cdot 1\cdot 3}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\begin{array}{c} 1\cdot 2\cdot 3 + 5\cdot 1\cdot(-2) + 3\cdot 3\cdot 2 \\ + 2(2\cdot(-2) + 1\cdot 3) + 0\cdot(\cdot\,\cdot) + (-1)\cdot(1\cdot 2 + 3\cdot(-2)) \end{array}}{38} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$= \ldots \qquad\qquad u_2 = \ldots$

(f) $C^0([0,1],\mathbb{R}) \qquad \langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)\cdot g(t)\,dt$

$t - 2t^2 \;,\; t$

$$u_1 = \frac{t-2t^2}{\| t-2t^2 \|} = \frac{t-2t^2}{\sqrt{\int_0^1 (s-2s^2)^2 \, ds}}$$

$$\int_0^1 (s^2 - 4s^3 + 4s^4) \, ds = \frac{1}{3} - 1 + \frac{4}{5} = \frac{5-15+12}{15} = \frac{2}{15}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2 &= u_2 - \langle u_2 | u_1 \rangle \cdot u_1 \\ &= t - \frac{15}{2} \cdot \left(\int_0^1 (s-2s^2) \, s \, ds \right) (t-2t^2) \end{aligned}$$

$$\Vert$$

$$\int_0^1 (s^2 - 2s^3)\,ds = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

$$\tilde{u}_2 = t - \frac{\cancel{15}^{\,5}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{6}_{\,2}}\right)(t - 2t^2) = t + \frac{5}{4}(t - 2t^2) = \frac{1}{4}(9t - 10t^2)$$

$$u_2 = \frac{\cancel{\frac{1}{4}}(9t - 10t^2)}{\left\| \cancel{\frac{1}{4}}(9t - 10t^2) \right\|} = \frac{9t - 10t^2}{\sqrt{\int_0^1 (9s - 10s^2)\,ds}} = \dots$$

(g) $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ $\quad \langle p(t) \mid q(t) \rangle = p(-1)\cdot q(-1)$

$+ p(1)\cdot q(1) + p(2)\cdot q(2)$

$t - 2t^2 \,,\, t$

$$u_1 = \frac{t - 2t^2}{\| t - 2t^2 \|} = \frac{t - 2t^2}{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-6)^2}} = \frac{t - 2t^2}{\sqrt{46}}$$

$$\tilde{u}_2 = t - \frac{1}{46}\left((-3)\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + (-6)\cdot 2\right)(t - 2t^2) = \ldots$$

(16) Trovare base ortonorm. dell'ortogonale a Span(. .) rispetto a $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_A$

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$x \perp v$:

$$2 x_1 \cdot 5 + 3 \cdot x_2 \cdot 5 + 3 \cdot x_1 \cdot (-2) + 7 \cdot x_2 \cdot (-2) = 0$$

$$4x_1 + x_2 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) \cdot 4 + 7 \cdot 4^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \dots$$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\Longrightarrow \{0\}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d_1 = 1 > 0$ $d_2 = 2-1 = 1 > 0$

$d_3 = 6-3-1 = 2 > 0$ è def. pos.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $1 \cdot x \cdot 2 + 2 \cdot y \cdot (-1) + 3 \cdot z \cdot 1$

$+ 1 \cdot (x \cdot (-1) + y \cdot 2) + 0 \cdot (x \cdot 1 + z \cdot 2)$

$+ 1 \cdot (y \cdot 1 + z \cdot (-1)) = 0$

$$x + y + 2z = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+2-2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{4+3}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + 4y - 3z + (-x + z) + (-y + 2z) = 0 \\ 3x + 2y + 3z + (x + 3z) + (y + 2z) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ 4x + 7z = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{49+2\cdot 7\cdot(-4)+3(-4)^2}}\begin{pmatrix}7\\0\\-4\end{pmatrix}=\ldots$$

(f) $\{0\}$

(17) Proiez. ortog su Span $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix}}_{\text{ortog. fra loro, norma } \sqrt{7}\text{:}}$

$$P_W(v)=\sum\frac{\langle v|w_i\rangle}{\|w_i\|^2}\cdot w_i$$

se $w_1\ldots w_k$ è base ortog!

$$P(x) = \frac{x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4}{7}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4}{7}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1 & -3\\ 3 & 1 & 5 & 0\\ 1 & -3 & 0 & 5\end{pmatrix}}_{A} \cdot x$$

proiez. ortog. su stsp. di $\mathbb{R}^4$ risp. a $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^4}$

$\Rightarrow A \cdot A = A$ (verificare)

A autoaggiunta, cioè ${}^tA = A$ ___