Geometria 21/5/14

Appelli scritti (cf. mio sito): tutti insieme 7/6 + 28/6 + 18/7.

— o —

$\alpha = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\omega = f\,dx + g\,dy$ 1-forma

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b \Big(f(\alpha(t)) \cdot X'(t) + g(\alpha(t)) \cdot Y'(t) \Big)\, dt .$$

$U : \Omega \to \mathbb{R}$, $dU = \dfrac{\partial U}{\partial x} dx + \dfrac{\partial U}{\partial y} dy$

$$\Rightarrow \int_\alpha dU = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a)) .$$

$\omega = f\,dx + g\,dy$ è esatta se esiste U (potenziale) t.c. $\omega = dU$, cioè $f = \dfrac{\partial U}{\partial x}$, $g = \dfrac{\partial U}{\partial y}$.

Visto: ω esatta $\Longleftrightarrow \int_\alpha \omega$ dipende solo da estremi α

$\Longleftrightarrow \int_\beta \omega = 0 \quad \forall \beta$ chiusa.

(Entrambe condizioni: impossibili in pratica.)

Notiamo se $\omega = f dx + g dy$ è esatta, cioè
$f = \frac{\partial U}{\partial x}$, $g = \frac{\partial U}{\partial y}$ allora

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

<u>Def</u>: ω è <u>chiusa</u> se $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Prop: se ω è esatta allora è anche chiusa.

Verifica esattezza: difficile (integrazione)
" chiusura: facile (derivazione)

Es: $\omega = \ln(1+\sin(xy^2))\,dx + e^{\sin(x^2y)}\,dy$

Esatta? : $\exists U$ t.c. $\frac{\partial U}{\partial x} = \ln(1+\sin\ldots$, $\frac{\partial U}{\partial y} = e^{\sin(x^2y)}$

Chiusa? : $\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\sin(x^2y)}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\ln(1+\sin(xy^2)) \overset{?}{=} 0$

$$2xy\cos(x^2y)\,e^{\sin(x^2y)} - \frac{2xy\cdot\cos(xy^2)}{1+\sin(xy^2)} \neq 0 \quad : \underline{\text{No}}$$

$\Longrightarrow$ ω non è neppure esatta_

ω esatta? ω chiusa?

→ No $\Longrightarrow$ ω non esatta

→ Sì $\Longrightarrow$ vedremo

—— ∘ ——

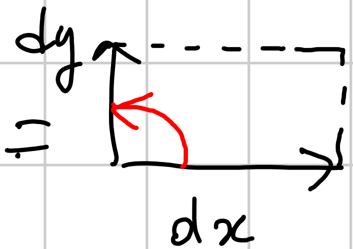
<u>Def</u> : $\omega = f\,dx + g\,dy$ esatta se $\dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$

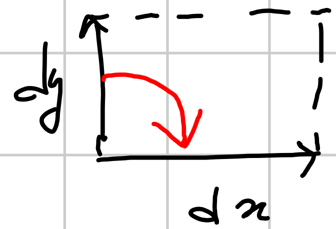
Def: data $\omega = f\,dx + g\,dy$ chiamo **differenziale** di ω

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy$$

elementi di lunghezze orientati nelle direz. degli assi

elemento d'area orientato:

$dx\,dy =$ 

$dy\,dx =$ 

$= -\,dx\,dy$

$$\omega = f \cdot dx + g \cdot dy \qquad (\text{Leibniz})$$

$$d\omega = \underbrace{df}_{\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy} \cdot dx + f \cdot \underbrace{ddx}_{0} + \underbrace{dg}_{\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy} \cdot dy + g \cdot \underbrace{ddy}_{0}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{dx\,dx}_{0} + \frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{dy\,dx}_{-dx\,dy} + \frac{\partial g}{\partial x}dx\,dy + \frac{\partial g}{\partial y}\underbrace{dy\,dy}_{0}$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Es: $\omega = \log(1+xy^3)\,dx + \sin(3x+7y^2)\,dy$

$$d\omega = \frac{3xy^2}{1+xy^3}\,dy\,dx + 3\cos(3x+7y^2)\,dx\,dy$$

$$= 3\left(\cos(3x+7y^2) - \frac{xy^2}{1+xy^3}\right)dx\,dy$$

Già visto: chiusa su Ω $\Longrightarrow$ esatta su Ω.

Cioè: $ddU = 0$

Q: esatta $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ chiusa. A: <u>NO</u>

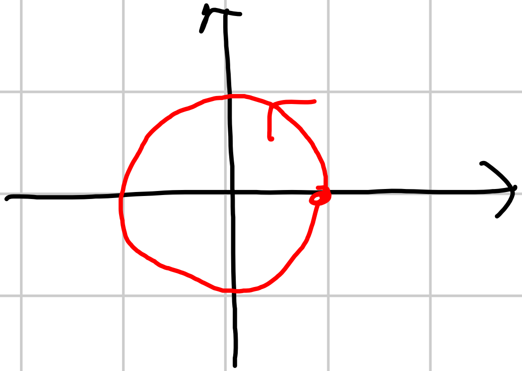
$$\omega = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} \quad \text{su } \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

E' chiusa: $d\omega$: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

$$= \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \checkmark$$

Non è esatta: $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$

è una curva chiusa: se ω fosse esatta



dovrei avere $\int_\alpha \omega = 0$;

invece $\int_\alpha \omega = \int_\alpha \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t\,(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 1.$$

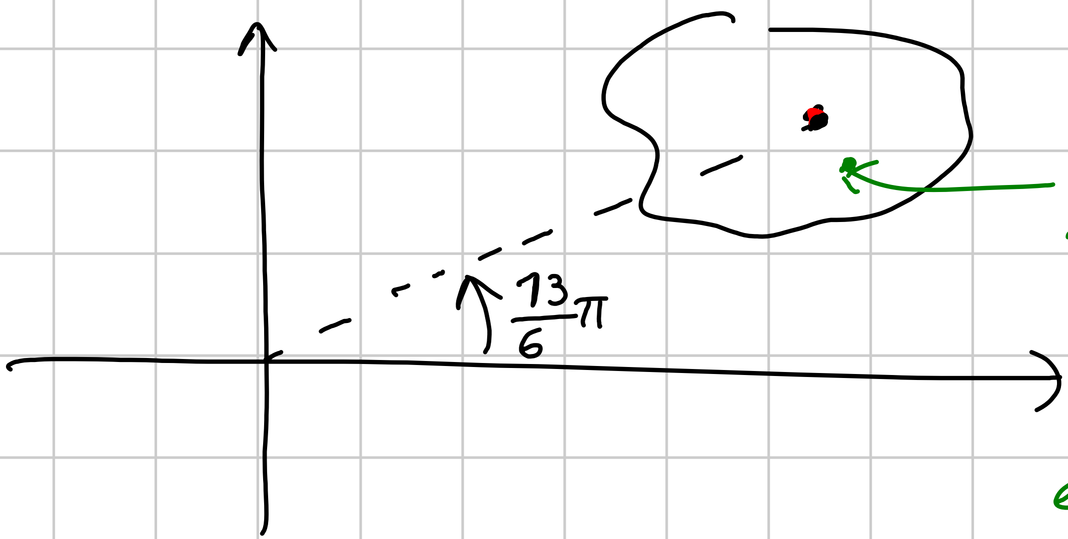
Perché $\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$?

Per un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ cerco di definire $\vartheta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Visto: $\vartheta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ non è definito ovunque continuo:

c'è un'ambiguità di $2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

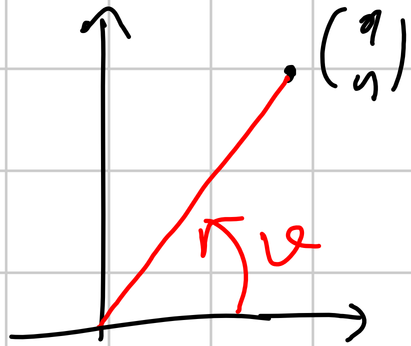
Tuttavia posso definire ϑ localmente ("in piccolo") in modo continuo:



se nel punto rosso l'argomento vale $\frac{13}{6}\pi$, in quello vicino la scelta naturale è $\frac{13}{6}\pi - \varepsilon$, non $\frac{\pi}{6} - \varepsilon$

$\Rightarrow$ ϑ non è ben def ma $d\vartheta$ lo è (due diverse espressioni locali differiscono per $2k\pi$).

loc (I quadrante $+$IV) : $\vartheta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$



$$\Rightarrow d\vartheta = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)dy$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)dx + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}\,dy$$

$$= \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

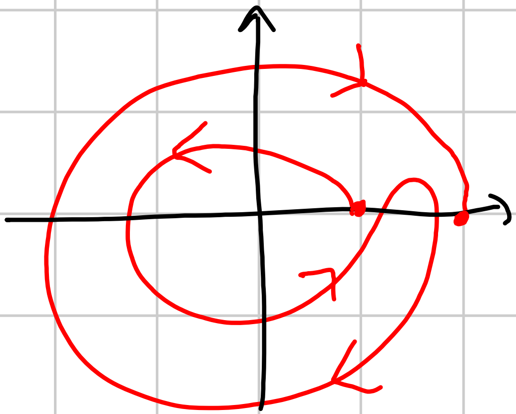
<u>Fatto</u>: la forma $\dfrac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ è $d\vartheta$.

$\Longrightarrow$

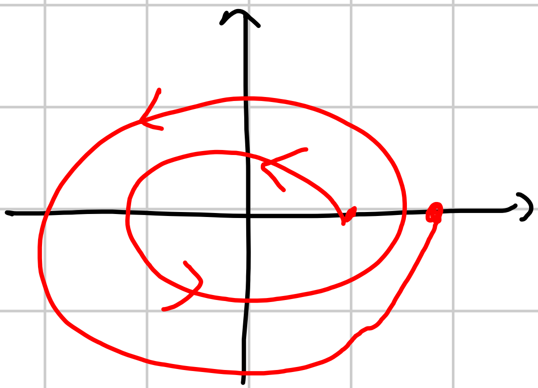
(1) $d\left(\dfrac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}\right) = 0$ $\left(\text{infatti } dd\vartheta = 0\right)$

(2) $\displaystyle\int_\alpha \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ = variaz. totale di ϑ lungo α.

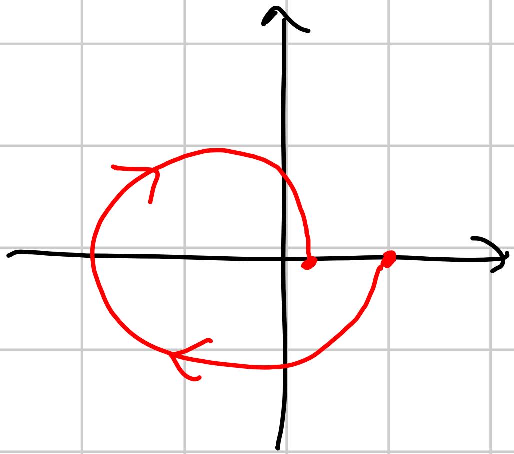
Esempi di calcolo di $\displaystyle\int_{\alpha} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$:



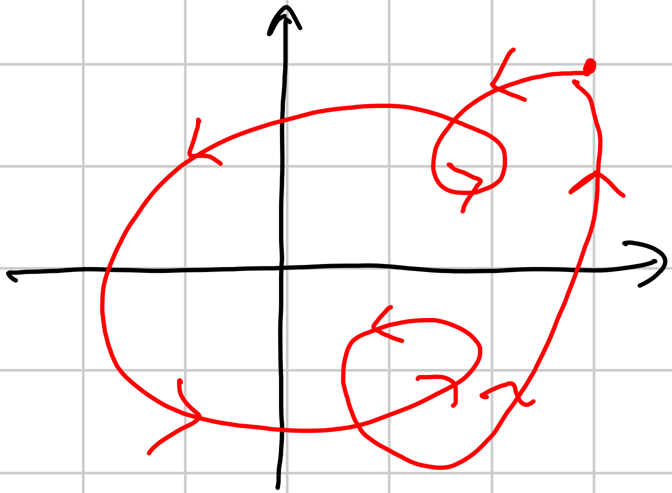
0



4π

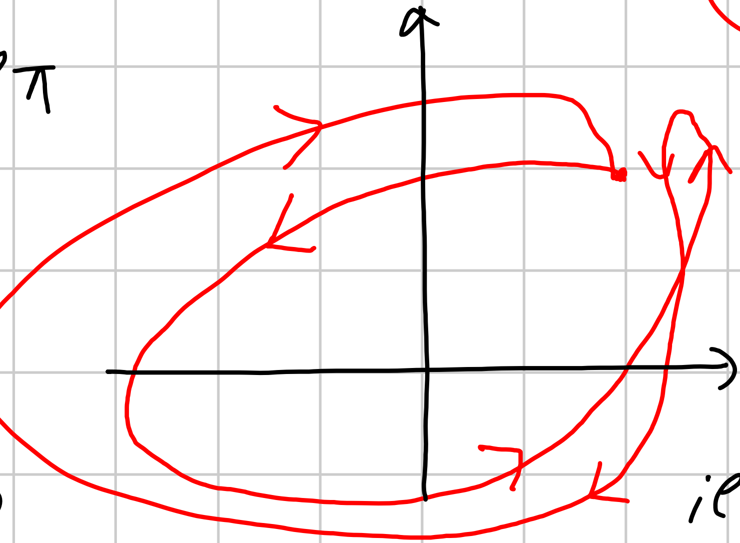


-2π



2π

0



0

Se α è chiusa

$$\int_\alpha \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} \quad \text{è } 2\pi \cdot$$

il numero algebrico di

giri intorno all'origine.

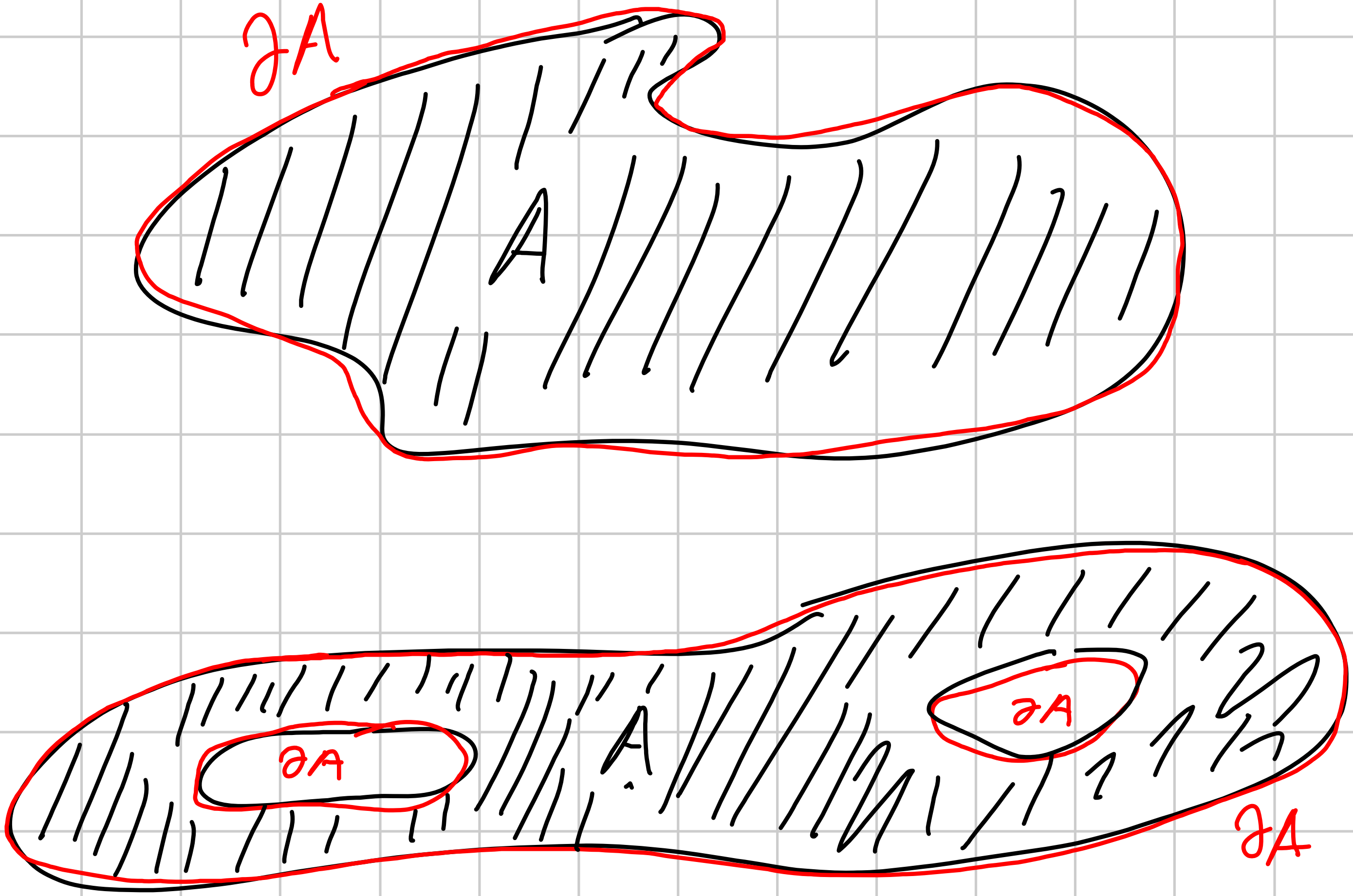
- $\omega = f\,dx + g\,dy$ su Ω
- esatta se $\exists U$ t.c. $\omega = dU$, cioè $f = \frac{\partial U}{\partial x}$, $g = \frac{\partial U}{\partial y}$
- chiusa se $d\omega = 0$ cioè $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
- esatta $\Rightarrow$ chiusa
- chiusa $\not\Rightarrow$ esatta. ORA: vere aggiungendo una ipotesi su Ω.

Teo fond. calcolo integrale: $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$

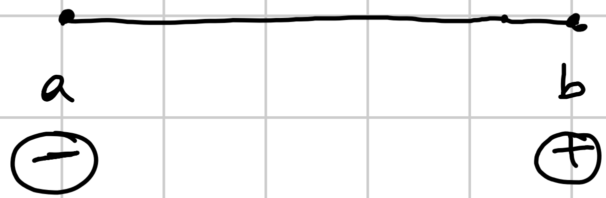
$$\underbrace{\text{integrale su } [a,b] \text{ di } F'}\quad \underbrace{\text{valutaz. di } F \text{ tra gli estremi di } [a,b]}$$

Daremo un analogo bidimensionale – (cioè "bordo" di $[a,b]$) –

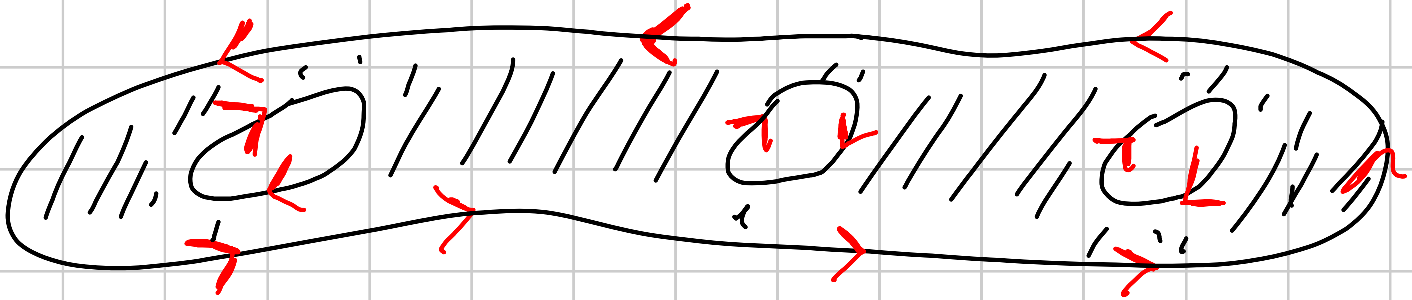
Uso la nozione di "bordo" di un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ "bello" (in particolare aperto):


∂A
A
∂A
∂A
A
∂A

bordo di $[a,b]$:



In 2D: supponendo che ∂A sia unione di curve regolari a tratti, orientiamo ∂A in modo che lasci A a sinistra:

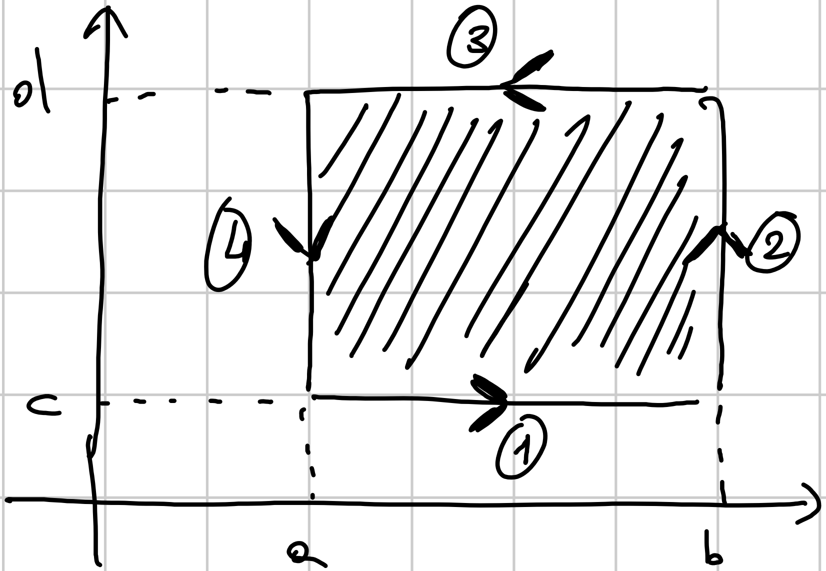


<u>Teo</u> (Gauss-Green): se $A \subset \mathbb{R}^2$ è aperto limitato con bordo unione di curve regolari a tratti e ω è una 1-forma regolare su un aperto che contiene $A \cup \partial A$ allora:

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega \qquad \left(\int_a^b F' = F(b) - F(a) \right)$$

<u>Dim</u>: la faccio per un rettangolo $[a,b] \times [c,d]$

Sia $\omega = f\,dx + g\,dy$



$$\int_{\partial A} \omega = \int_{1} + \int_{2} + \int_{3} + \int_{4}$$

$$= \underbrace{\int_a^b \left(f(t,c)\, 1 + g(t,c) \cdot 0 \right) dt}_{1} + \cdots$$

$$= \int_a^b f(t,c)\,dt + \int_c^d g(b,t)\,dt - \int_a^b f(t,d)\,dt - \int_c^d g(a,t)\,dt$$

1 2 3 4

$$\int_A dw = \int_a^b \int_c^d \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx\,dy =$$

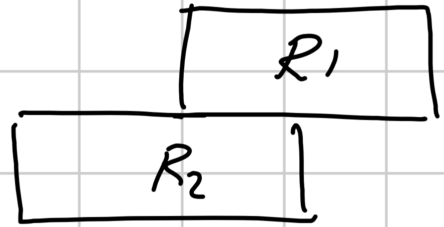
$$= - \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \right) dx + \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}\,dx \right) dy$$

$$= -\int_a^b \left(f(x,d) - f(x,c)\right) dx + \int_c^d \left(g(b,y) - g(a,y)\right) dy$$

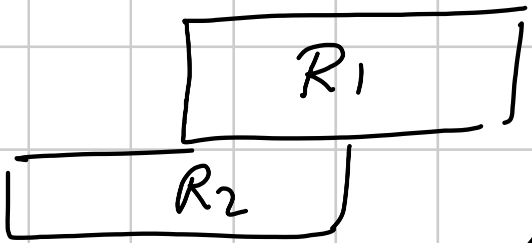
$$= -\underbrace{\int_a^b f(x,d)\,dx}_{3} + \underbrace{\int_a^b f(x,c)\,dx}_{1} + \underbrace{\int_c^d g(b,y)\,dy}_{2} - \underbrace{\int_c^d g(a,y)\,dy}_{4}.$$

Fine per rettangolo. Per A qualsiasi;
idea: approssimare A con unione di
rettangoli: oss:

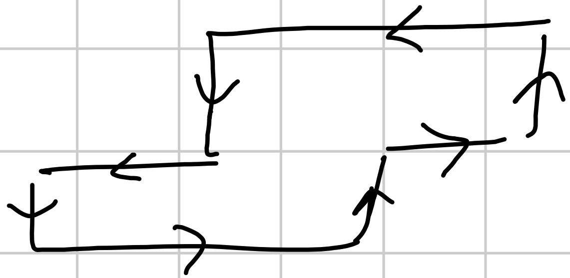
$$\int_{R_1 \cup R_2} d\omega = \int_{R_1} d\omega + \int_{R_2} d\omega$$



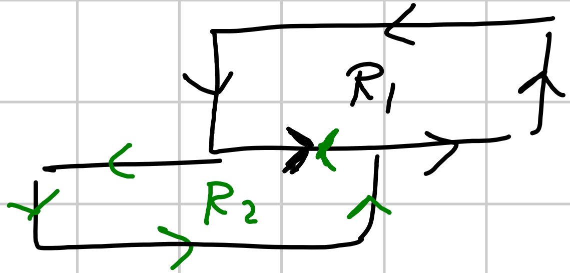
$\partial \Big($



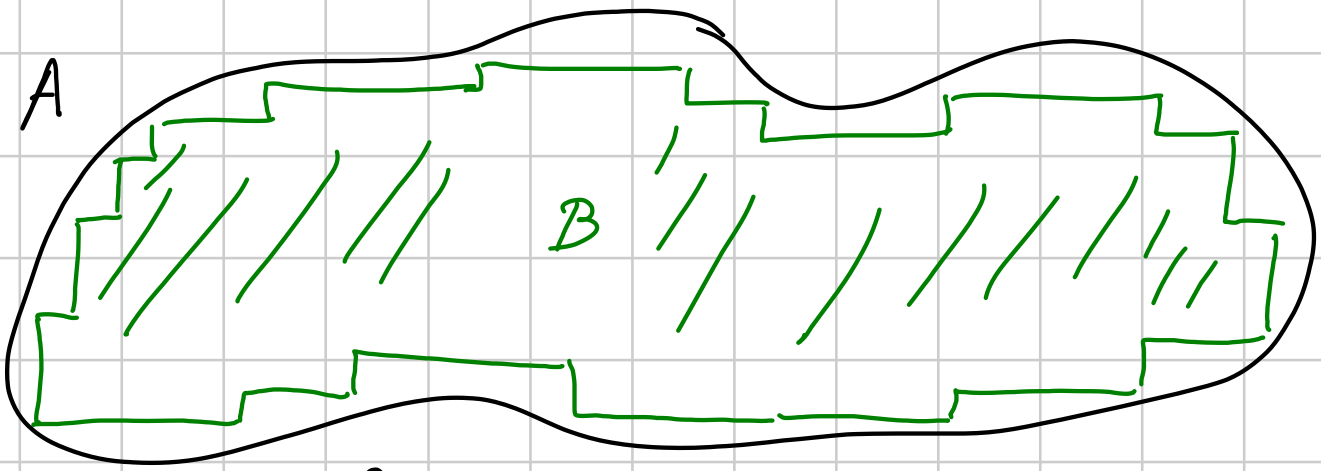
$\Big) =$



$\partial \; R_1 \cup R_2$



$$\Rightarrow \int_{\partial(R_1 \cup R_2)} \omega = \int_{\partial R_1} \omega + \int_{\partial R_2} \omega$$

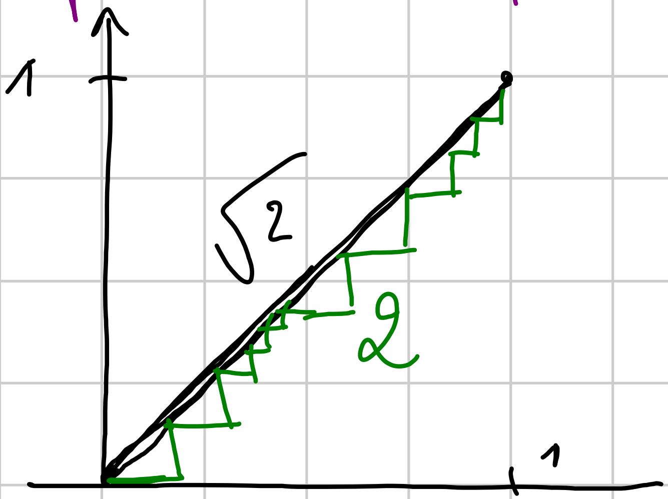


Visto: $\underbrace{\int_B d\omega}_{\text{approssima } \int_A d\omega \text{ : ovvia}} = \underbrace{\int_{\partial B} \omega}_{\text{approssima } \int_{\partial A} \omega}$

NON OVVIO:

Ad esempio è falso per la lunghezza:

(Vero per le forme)



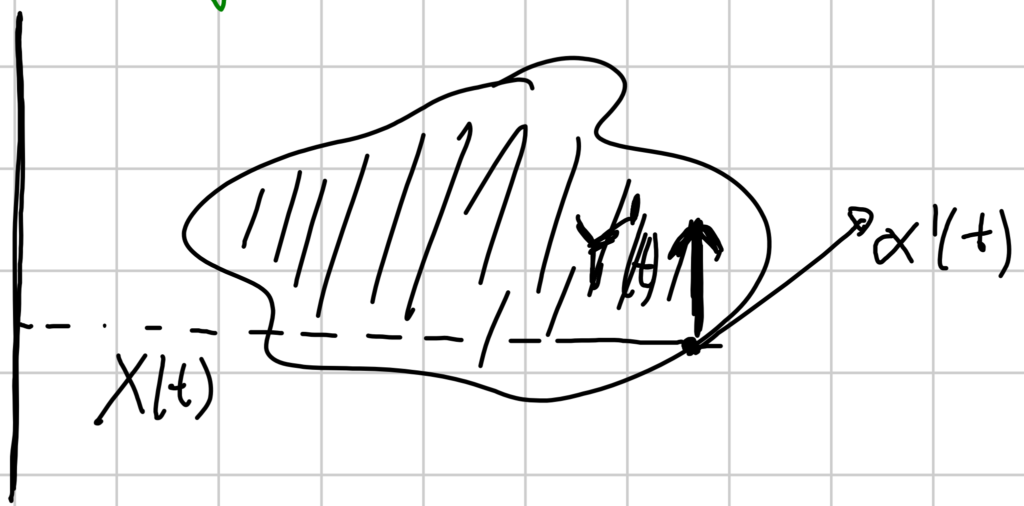
""

G-G: $$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega$$

Con: $\displaystyle\int_{\partial A} x\cdot dy = \int_A dx\,dy = \text{Area}(A)$

(anche anche $-\int y\,dx$)

integrale eseguito sul bordo consente di trovare l'area



α

$$\int_a^b X(t)\cdot Y'(t)\,dt = \text{area}$$

$\omega = f\,dx + g\,dy$ su Ω

supponiamo che sia chiusa (è necessario per l'esattezza)

Sappiamo che ω può non essere esatta; però

Prop: se ogni curva semplice e chiusa in Ω è bordo di un insieme A contenuto in Ω allora ω è esatta su Ω.

"Dimo": Basta vedere che $\int_\alpha \omega = 0 \quad \forall \alpha$ chiusa.

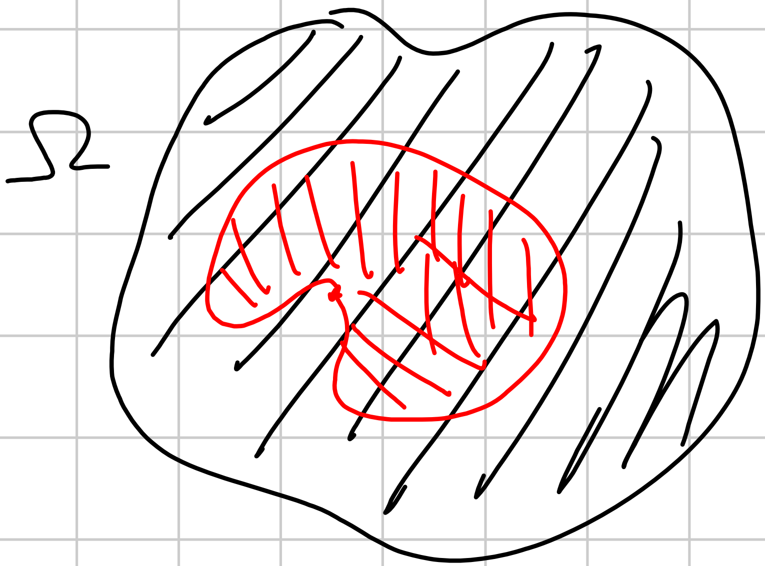
[Facciamo finta che α sia anche semplice.]

$\underset{\text{ipotesi}}{\Longrightarrow} \quad \alpha = \partial A \quad \text{con} \quad A \subset \Omega$

$$\underset{\text{G-G}}{\Longrightarrow} \quad \int_\alpha \omega = \int_{\partial A} \omega = \int_A \underbrace{d\omega}_{\substack{\| \\ 0 \\ \text{ipotesi}}} \Longrightarrow 0.$$

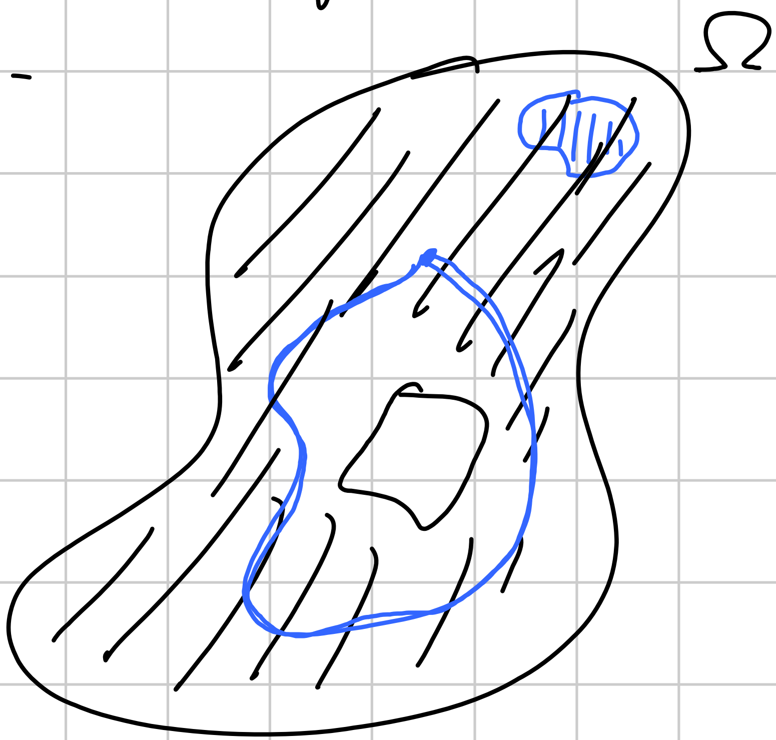
$\boxed{///}$

Def: diremo che Ω è semplicemente connesso se ogni curva α chiusa e semplice in Ω è bordo di $A \subset \Omega$.



SENZA BUCHI

SEMPLICEMENTE CONNESSO

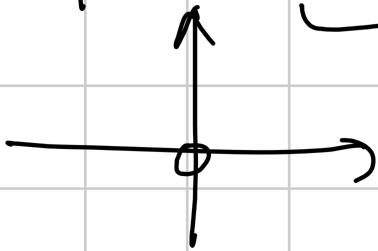


CON UN BUCO

NON S.C.

Cioè "semplicemente connesso = senza buchi".

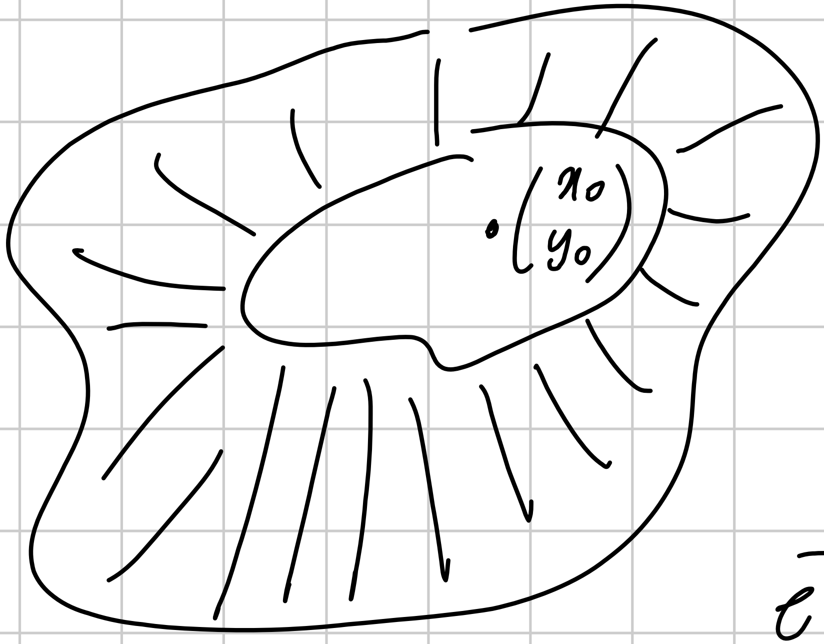
Es: $\dfrac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ è def. su $\underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}}_{\text{non s.c.}}$



Riassunto: ω su Ω

- ω esatta $\Longrightarrow$ ω chiusa sempre
- ω chiusa $\Longrightarrow$ ω esatta se Ω è s.c.
- anche se Ω è s.c. su Ω esistono forme esatte

•) se Ω non è s.c. esistono su Ω delle forme chiuse non esatte



$$\omega = \frac{-(y-y_0)dx + (x-x_0)dy}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

($d\theta$ centrato in $\binom{x_0}{y_0}$)

è chiusa ma non esatta