Geometria 20/3/14

<u>Def</u>: $f: V \to V$ è diagonalizzabile se esiste $\mathcal{B}$ base di V t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è diagonale.

In generale: data f si cerca una base $\mathcal{B}$ t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia "facile" (molti zeri).

Q: Perché non $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$? A:

<u>Prop</u>: data $f: V \to W$ lin. di rango k esistono basi $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{C}$ di W t.c.

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

<u>Cor</u>: usando $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ di f si "vede" solo il rango.

Dim: Scegliamo una base $v_{k+1}, \dots, v_n$ di $\operatorname{Ker} f$ e precompletiamo a base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ di V. Visto (formula dim): $f(v_1), \dots, f(v_k)$ sono una base di $\operatorname{Im}(f)$; completiamo a base $\mathcal{C} = (f(v_1), \dots, f(v_k), w_{k+1}, \dots, w_m)$ di W: allora

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{matrix} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ & & & 0 & \vdots & & \\ 0 & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\0\\1\end{matrix}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} m-k \end{matrix} \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{k}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{n-k} & \end{matrix}$$

▨

Scopo: data $f: V \to V$ trovare $\mathcal{B}$ con $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ facile.

Prop: data $f: V \to V$ e $\mathcal{B}_0$ base di V, posto $A_0 = [f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0}$ si ha che le matrici $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ al variare di $\mathcal{B}$ base di V sono tutte e sole quelle del tipo $M^{-1} \cdot A_0 \cdot M$ con M invertibile.

Dim: Data $\mathcal{B}$ altra base, se M è la matrice di cambio da $\mathcal{B}_0$ a $\mathcal{B}$ sappiamo che:

$$\underbrace{[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}}_{\text{nuova}} = \underbrace{M^{-1}}_{\text{inversa matrice cambio arrivo}} \cdot \underbrace{[f]^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{B}_0}}_{\text{vecchia}} \cdot \underbrace{M}_{\text{matrice cambio partenza}}$$

cioè $A = M^{-1} \cdot A_0 \cdot M$. Viceversa se $A = M^{-1} \cdot A_0 \cdot M$ si ha $A = [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ con

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cdot M$. $\boxed{///}$

Morale: data f si sceglie una base $\mathcal{B}_0$, si pone $A_0 = [f]^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{B}_0}$ e si cerco M invertibile tale che $M^{-1} \cdot A_0 \cdot M$ sia facile.

In pratica, se $V = \mathbb{R}^n$ la f è data direttamente come matrice $A_0 \in M_{n \times n}$.

Def: due matrici A_0 e A per cui esiste M con $A = M^{-1} \cdot A_0 \cdot M$ si dicono coniugate. (Alcuni dicono "simili".)

Scopo: data una matrice (quadrata) trovare una sua coniugata facile.

Def: data $f: V \to V$ lin, V sp. vett. su $\mathbb{K}$, un numero $\lambda \in \mathbb{K}$ si dice autovalore di f se esiste $v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$; tale v è autovettore.

Oss: Se non chiedessi $v \neq 0$ avrei

$$\underset{0}{\underset{\parallel}{f(0)}} = \lambda \cdot 0 \quad \text{per ogni } \lambda \in K, \text{ cioè}$$

ogni $\lambda \in K$ sarebbe autovalore.

Es: $N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{3} & 1 \\ 2\sqrt{3} & 2 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$;

$\lambda = 3$ è autovalore poiché per $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$

si ha $N \cdot v = 3 \cdot v$.

la matrice N pensata come applicazione e applicata a v.

Oss: Se $f: V \to V$ è lineare possiamo definire $\det(f)$ come $\det([f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}})$ dove

$\mathcal{B}$ è una base di V.

Infatti cambiando base tale det rimane uguale:

se $\mathcal{B}'$ è altra base e $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot M$ allora

$$[f]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'} = M^{-1} \cdot [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \cdot M$$

$$\Rightarrow \det\left([f]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}\right) = \underset{\cancel{\frac{1}{\det(M)}}}{\underset{\shortparallel}{\det(M^{-1})}} \cdot \det\left([f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\right) \cdot \cancel{\det(M)}$$

$$= \det\left([f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\right).$$

Prop: data $f : V \to V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di f

$$\iff \det(\lambda \cdot id_V - f) = 0.$$

Cor: per matrici: $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow$

$$\det(\lambda \cdot I_n - A) = $$

Dim: λ autoval

$\Longleftrightarrow \exists v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$

$\Longleftrightarrow \exists v \neq 0$ t.c. $\lambda \cdot v - f(v) = 0$

$\Longleftrightarrow \exists v \neq 0$ t.c. $(\lambda \cdot id_V - f)(v) = 0$

$\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(\lambda \cdot id_V - f) \neq \{0\}$

$\Longleftrightarrow \lambda \cdot id_V - f$ non è invertibile

$\Longleftrightarrow \det(\lambda \cdot id_V - f) = 0$. $\blacksquare$

Def: data $f: V \to V$ chiamo polinomio caratteristico di f

$$p_f(t) = \det(t \cdot id_V - f) \in \mathbb{K}[t].$$

Per matrici: $p_A(t) = \det(t \cdot I_n - A)$.

Visto: $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore $\Longleftrightarrow$ λ è una radice del polinomio caratteristico.

Es: $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

$$p_A(t) = \det\left(t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} t-6 & -4 \\ 2 & t+3 \end{pmatrix}$$

$$= (t-6)(t+3)+8$$

$$= t^2-3t-10 = (t-5)(t+2)$$

$\Longrightarrow$ gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -2$.

Verifichiamolo:

Cerchiamo $v_1 \neq 0$ t.c. $A \cdot v_1 = 5 \cdot v_1$:

$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4y_1 = 5x_1 \\ -2x_1 - 3y_1 = 5y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4y_1 = 0 \\ -2x_1 - 8y_1 = 0 \checkmark \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ scelgo $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 5$ è autovalore poiché $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ è un relativo autovettore, cioè $A \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1$ —

$\lambda_2 = -2$ autoval: verifica; cerco $v_2 \neq 0$ t.c.
$A \cdot v_2 = -2 \cdot v_2$

$v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$
$$\begin{cases} 6x_2 + 4y_2 = -2x_2 \\ -2x_2 - 3y_2 = -2y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x_2 + 4y_2 = 0 \\ -2x_2 - y_2 = 0 \end{cases} \checkmark$$

posso scegliere $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ —

Es: Sia $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

$f: V \to V$ data da $f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 \\ -x_2 - x_3 \end{pmatrix}$.

Cerco gli autovalori. Cerco una matrice:

$$\mathcal{B} = \left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \right); \quad f(v_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$p_f(t) = \det\left(t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} t-6 & 0 \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}$$

$$= (t-6)(t+1) \Rightarrow \text{autoval. } 6 \text{ e } -1.$$

Oss: se A è triangolare $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix}$

oppure $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ allora gli autovalori

di A sono $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ poiché

$$p_A(t) = \det(t \cdot I_n - A) = \det \begin{pmatrix} t-\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & t-\lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= (t-\lambda_1) \cdots (t-\lambda_n)$$

Oss: Per noi:

$$p_A(t) = \det(t \cdot I_n - A)$$

$$p_f(t) = \det(t \cdot id_V - f)$$
$$= \det\left(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right).$$

<u>Ora</u>: $\det(-N) = (-1)^n \cdot \det(N)$
se $N \in M_{n \times n}$.

Allora definiscono

$$\tilde{p}_A(t) = \det(A - t \cdot I_n)$$

dunque $\tilde{p}_A(t) = (-1)^n \cdot p_A(t)$.

<u>Oss</u>: $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$

dunque per $f : V \to V$ è ben definita
la traccia $tr(f) = tr([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$

con $\mathcal{B}$ base di V. Infatti cambiando base $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot M$ ho

$$[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = M^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M$$

$$\Rightarrow tr\left([f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}\right) = tr\left(\underbrace{M^{-1}}\cdot\underbrace{\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M\right)}\right)$$

$$= tr\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot \underbrace{M \cdot M^{-1}}_{I_n}\right) = tr\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right).$$

Prop: Data $f: V \to V$ lin con $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$

$p_f(t)$ è un polinomio monico di grado n

$$p_f(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n \, ;$$

inoltre $a_1 = -tr(f)$ e $a_n = (-1)^n det(f)$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow p_A(t) = t^2 - 9t + 26$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(9 \pm \sqrt{81-104}\right)$

non esistono su $\mathbb{R}$ ($\Rightarrow$ A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$)

$\exists$ su $\mathbb{C}$ $\frac{1}{2}(9 \pm i\sqrt{23})$ esistono distinti.

Dim: Sia $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow p_f(t) = det\left(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right) = det \begin{pmatrix} t-\alpha_{11} & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} & \cdots \\ -\alpha_{21} & t-\alpha_{22} & -\alpha_{23} & \cdots \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & t-\alpha_{33} & \cdots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$

Ricordo: det $n \times n$

$=$ somma di $n!$ addendi, ognuno è

$\pm$ prodotto di n coeff. della matrice

presi su righe e colonne diverse.

Nella matrice $t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ogni coeff è

un polinomio di grado 0 (numero) fuori dalla diago

e di grado 1 sulla diagonale.

Grado più alto possibile di t negli $n!$ addendi:

ottenuto dal prodotto dei coeff sulla diago

principale $(t - \alpha_{11}) \dots (t - \alpha_{nn})$

$\Rightarrow$ il termine di grado massimo è t^n.

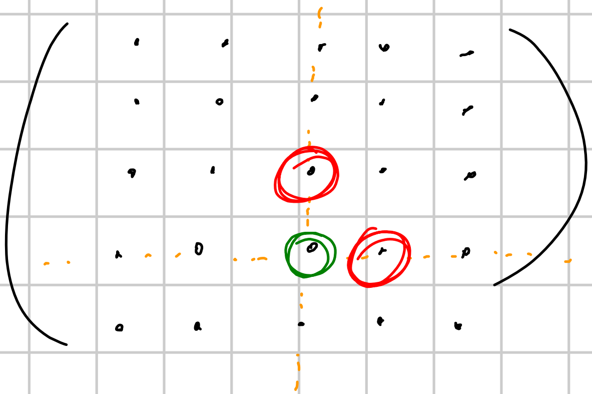
In questo prodotto il termine di grado $n-1$ è

$$t^{n-1} \underbrace{(-\alpha_{11} - \cdots - \alpha_{nn})}_{-\operatorname{tr}([f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}) = -\operatorname{tr}(f)}$$

Per concludere che

$$p_f(t) = t^n - \operatorname{tr}(f) \cdot t^{n-1} + (\text{grado} < n-1)$$

osservo che se faccio il prodotto di coeff. non tutti sulla diago princ



coeff che appare

coeff che NON appare

$\Rightarrow$ ce ne sono almeno 2 non sulla diag. principale $\Longrightarrow$ grado in t è $\leq n-2$.

Infine: se $p_f(t) = t^n - tr(f)\, t^{n-1} + \dots + a_0$

ho $a_0 = p_f(0) = \det(0 \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$

$= \det(-[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = (-1)^n \cdot \det([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$

$= (-1)^n \cdot \det(f)$. $\boxed{\text{V}}$

Oss: Per $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ abbiamo trovato autoval/autovett

$\lambda_1 = 5 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = -2 \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ora v_1, v_2 sono lin. indip. $\Longrightarrow$ sono base

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile.

In generale:

Prop: se $f: V \to V$, $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$

ha autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distinti

allora f è diagonalizzabile.

(Dimostro poco.)

Importante: la definizione di autovalore è

$\lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $\exists\, v \neq 0$ con $f(v) = \lambda \cdot v$

invece

radici del pol. caratteristico $p_f(t) = \det(t \cdot I - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$

è come si cercano gli autovalori.

Grazie alla Prop. la strategia per vedere se $f: V \to V$ è diagonalizzabile è questa:

- Scrivo una $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ (se $V = \mathbb{K}^n$ ho già $f = A$ $\Rightarrow$ salto)
- Scrivo $p_f(t) = \det(t \cdot I_n - A)$
- Cerco le radici di $p_f(t)$
- Se le radici sono tutte in $\mathbb{K}$

(garantito se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, non se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) e sono distinte allora f è diago.

- Se non sono distinte allora ....
  risposte più elaborate

Dimo (Prop): Ho autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distinti; scelgo relativi autovettori $v_1, \dots, v_n$, cioè

$$v_j \neq 0 \quad e \quad f(v_j) = \lambda_j \cdot v_j.$$

Basta verificare che $v_1, \dots, v_n$ sono base, anzi (dato che sono n) basta vedere che sono lin. indip. Provo per induzione su $j = 1, \dots, n$ che $v_1, \dots, v_j$ sono lin. indip. (per $j = n$ ho la tesi).

Per $j=1$ ho v_1, ma $v_1 \neq 0 \Rightarrow$ ok.

Suppongo $v_1, \dots, v_j$ lin. indip. e provo per assurdo che lo sono anche $v_1, \dots, v_j, v_{j+1}$:

ipotesi dell'assurdo:

$$v_{j+1} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_j v_j \, . \quad \circledast$$

Applico f a tale uguaglianza:

$$f(v_{j+1}) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_j f(v_j)$$

$$\lambda_{j+1} \cdot v_{j+1} = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_j \lambda_j v_j \quad \odot$$

Ora calcolo $\lambda_{j+1} \circledast - \odot$:

$$0 = \alpha_1 (\lambda_{j+1} - \lambda_1) v_1 + \dots + \alpha_j (\lambda_{j+1} - \lambda_j) v_j$$

Per ipotesi induttiva $v_1, \dots, v_j$ lin. indip.

$$\Longrightarrow \alpha_i \underbrace{(\lambda_{j+1} - \lambda_i)}_{\neq 0} = 0 \quad i = 1, \dots, j$$

poiché $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sono distinti

$$\Longrightarrow \alpha_i = 0 \quad i = 1, \dots, j$$

$$\Longrightarrow v_{j+1} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_j v_j \quad \text{è nullo;}$$

assurdo: lo abbiamo scelto $\neq 0$ _

$\blacksquare$