Geometria 14/5/14

Recupero domani 11:30 - 13:30 F3.

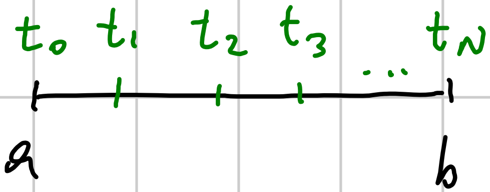
Curva (regolare) : $\alpha : [a.b] \to \mathbb{R}^n$
(parametrizzata) $\alpha'(t) \neq 0 \ \forall t \in [a.b]$.

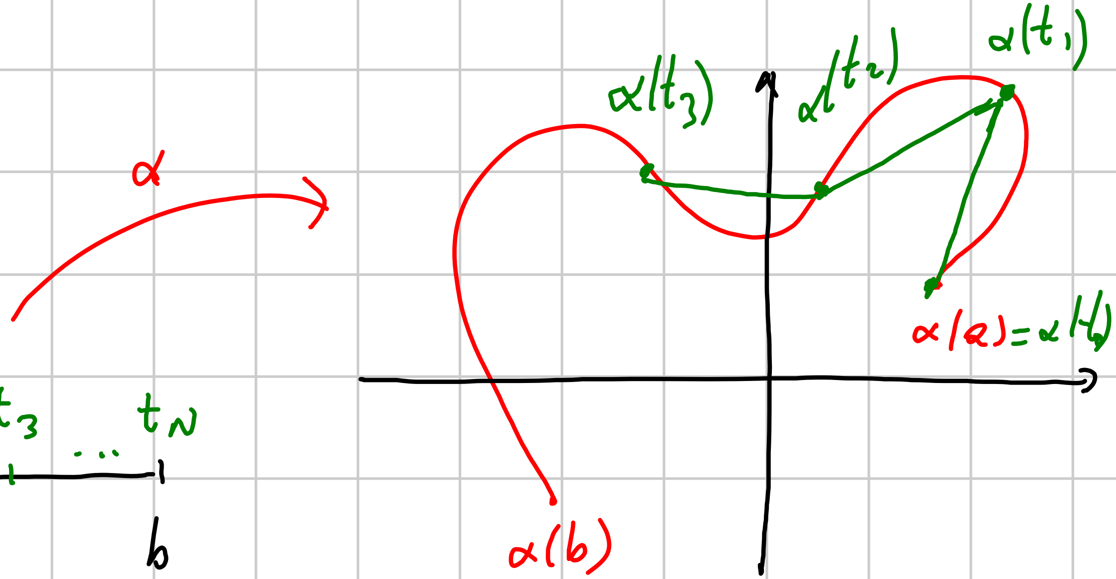
Cambio di parametro: $\beta = \alpha \circ \tau : [c,d] \to \mathbb{R}^n$
$\tau : [c,d] \to [a.b]$ invertibile, derivabile con inversa deriv.

τ preserva l'orientazione (verso di percorrenza sulla curva) se $\tau' > 0$.

Lunghezza di α

$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$





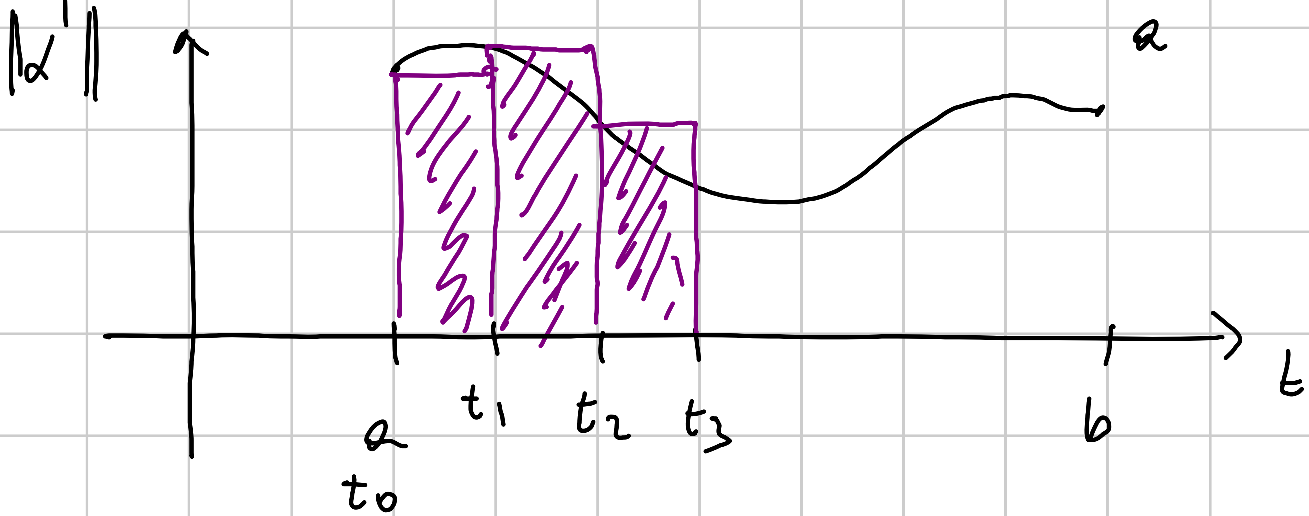
approssimiamo la curva con una spezzata

$$L(\alpha) \cong \sum_{i=0}^{N} \|\underbrace{\alpha(t_{i+1})}-\alpha(t_i)\| \leftarrow \text{lunghezza spezzata}$$

||S

$$\alpha(t_i)+(t_{i+1}-t_i)\cdot\alpha'(t_i) \leftarrow$$ Taylor I on line

$$\cong \sum_{i=0}^{N-1} \|\alpha'(t_i)\| \cdot (t_{i+1}-t_i) \cong \int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt$$

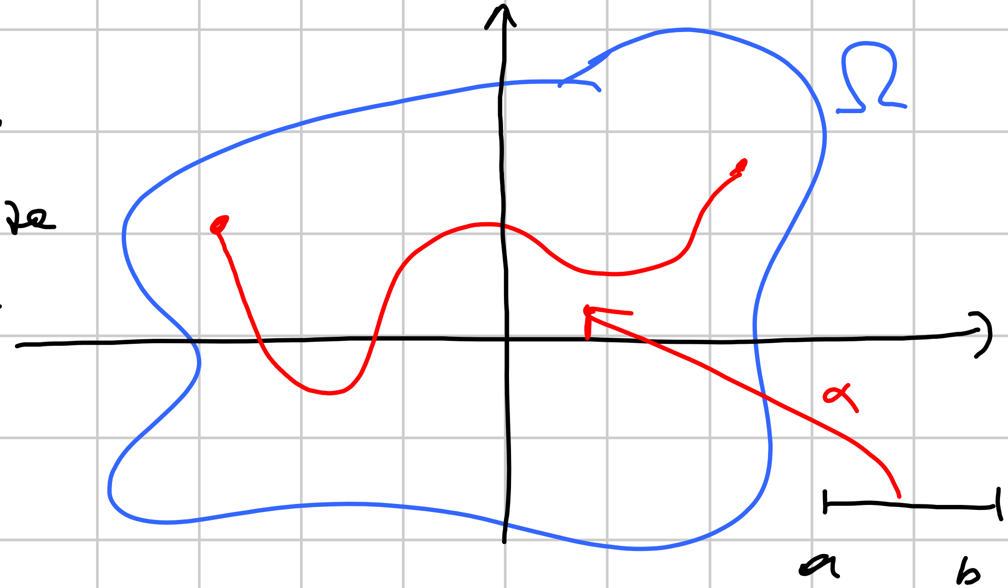


Def: chiamo lunghezza di α $\quad L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt$

Integrale di una funzione scalare su una curva:

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$; $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$f(x) =$ "costo" di percorrenza dell'unità di lunghezza nel punto x



Costo totale di percorrenza di α

$$\int_\alpha f = \int_a^b \underbrace{\underbrace{f(\alpha(t))}_{\text{costo unitario nel punto } \alpha(t)} \cdot \underbrace{\|\alpha'(t)\|\, dt}_{\text{spostamento infinitesimo al tempo}}}_{\text{costo totale}}$$

Def: se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\alpha : [a,b] \to \Omega$

chiamo integrale su α di f

$$\int_\alpha f = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\|\, dt .$$

Prop: $L(\alpha)$ e $\int_\alpha f$ non cambiano cambiando parametrizzazione.

Dim: $\beta = \alpha \circ \tau \qquad \tau : [c,d] \to [a,b]$

$$\Rightarrow \beta'(s) = \alpha'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)$$

$$\Rightarrow \int_\beta f = \int_c^d f(\beta(s)) \cdot \|\beta'(s)\| \, ds = \int_c^d f(\alpha(\overbrace{\tau(s)}^{t})) \cdot \|\alpha'(\overbrace{\tau(s)}^{t})\| \cdot \underbrace{|\tau'(s)| \, ds}_{dt}$$

cambio variabile $t = \tau(s)$

$$= \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| \, dt = \int_\alpha f . \qquad \blacksquare$$

<u>Def</u>: diciamo che α è in parametro d'arco se $\|\alpha'(t)\| \equiv 1$, cioè se α percorre la curva a velocità scalare costante unitaria.

<u>Prop</u>: E' sempre possibile riparametrizzare

una curva in parametro d'arco.

<u>Dim:</u> Abbiamo $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$;

Definisco $\sigma : [a,b] \to [0,L]$

$\sigma(t) =$ lunghezza percorsa lungo α tra a e t $= \displaystyle\int_a^t \|\alpha'(u)\| du$

(dove $L = L(\alpha)$). Uso la lunghezza come misura del tempo: considero $\sigma^{-1} : [0,L] \to [a,b]$

e $\beta = \alpha \circ \sigma^{-1} : [0, L] \to \mathbb{R}^n$; allora

$$\beta'(s) = \alpha'(\sigma^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(s))}$$

ora per il Teo. Fond. del Calcolo Integrale ho

$$\sigma'(t) = \|\alpha'(t)\|$$

$$\Longrightarrow \beta'(s) = \frac{\alpha'(\sigma^{-1}(s))}{\|\alpha'(\sigma^{-1}(s))\|} \Longrightarrow \|\beta'(s)\| = 1.$$

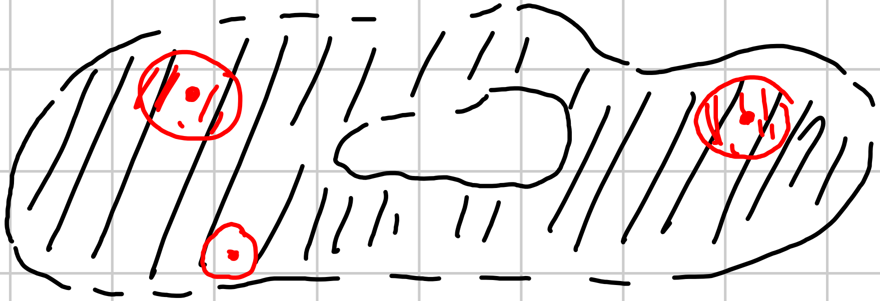
$\blacksquare$

Fatto: la riparametrizzazione in p.d'a. esiste sempre ma in pratica non si riesce a trovare esplicitamente quasi mai.

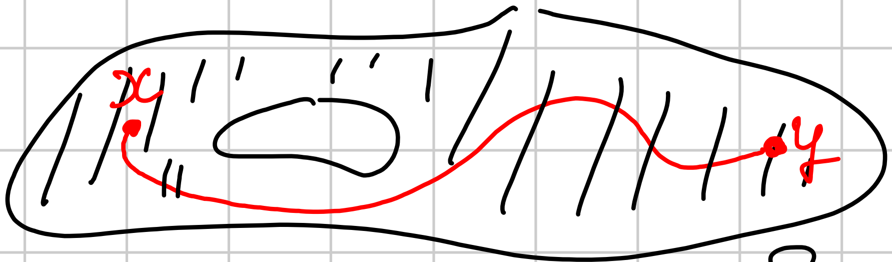
———— o ————

Def: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice:

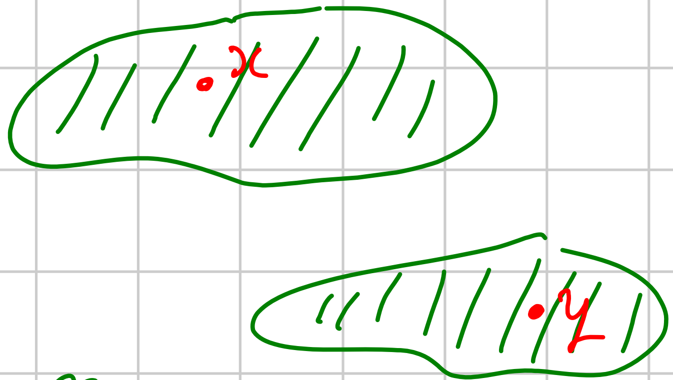
- aperto se per ogni $x \in \Omega$ esiste $r > 0$ t.c. la palla di centro x e raggio r è contenuta in Ω



- connesso: per ogni $x, y \in \Omega$ esiste $\gamma : [0,1] \to \Omega$ continua con $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$



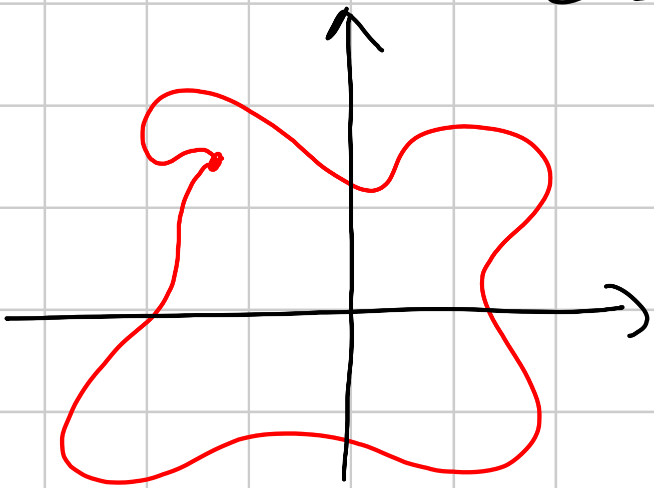
connesso Ω



non connesso

Morale: "aperto" = grosso senza bordo
"connesso" = fatto di un pezzo solo

Teo (Jordan): Se α è una curva semplice e chiusa in $\mathbb{R}^2$ allora il complementare di α consiste di <u>due</u> aperti connessi, uno limitato ("dentro") e uno no ("fuori") _



[Vale anche per α non regolare; DIFFICILE.]

— o —

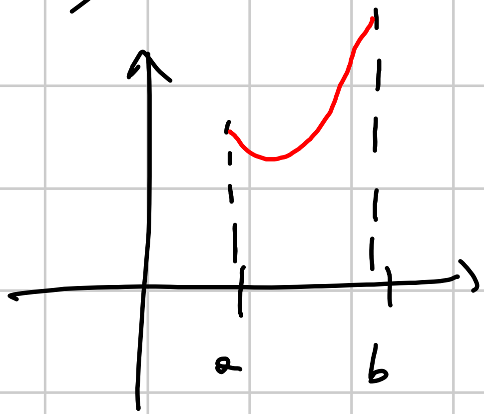
Come definire curve? (In $\mathbb{R}^2$)

Grafici: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ il grafico di f è curva

$\alpha(t) = (t, f(t))$

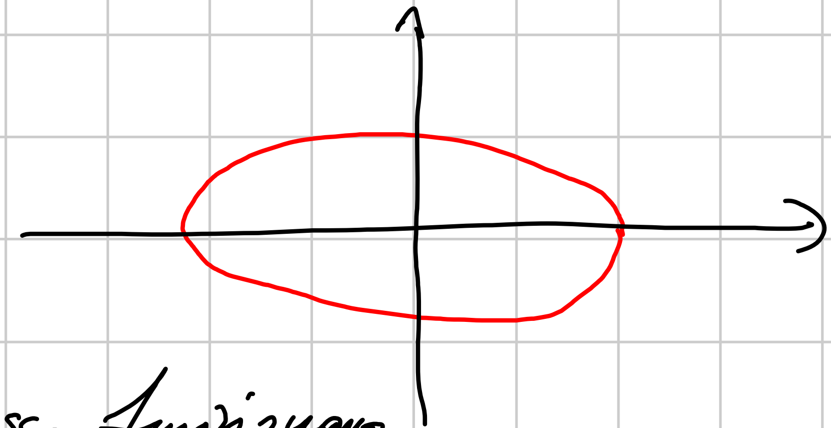
(regolare se $\exists f'$: $\alpha'(t) = (1, f'(t))$)



Luoghi di zeri

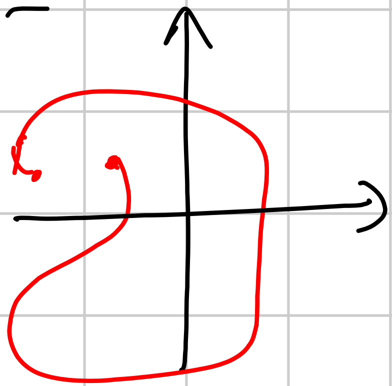
$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

GRAFICI:



Non sono miracoli ma spesso funzionano

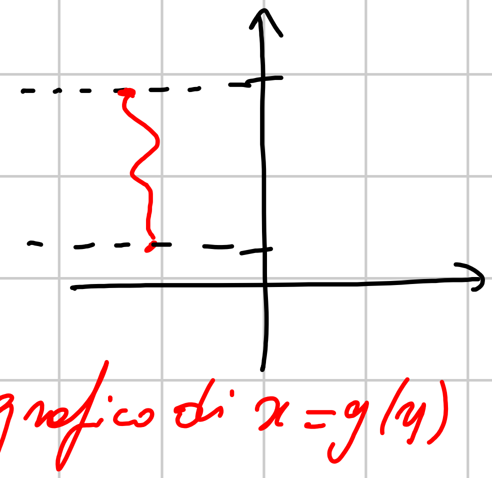
Non è vero che ogni curva è un grafico né di $y=f(x)$ né di $x=g(y)$:



$\underline{\text{Prop}}$: ogni curva è "localmente" un grafico.

$\underbrace{\hphantom{\text{ogni curva è localmente un grafico}}}$

qualunque punto io prenda se guardo abbastanza in piccolo vicino al punto vedo un grafico.

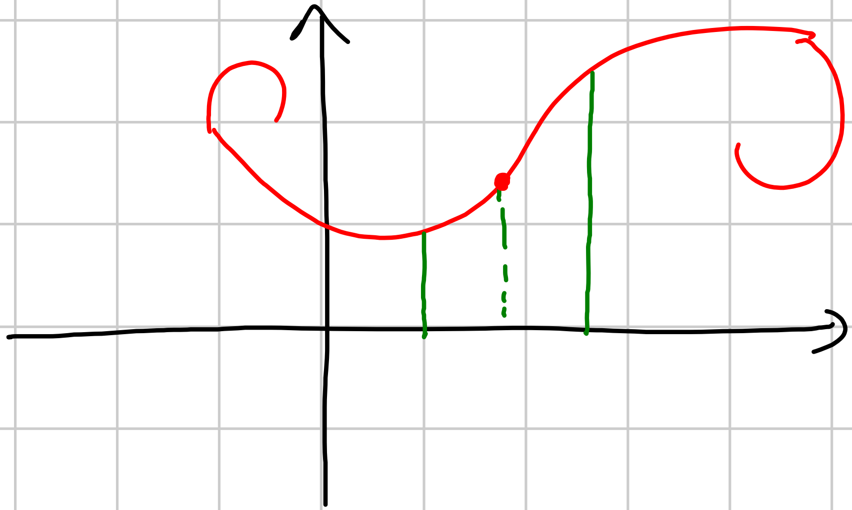


$\underline{\text{Idea}}$: Prendo $t_0 \in [a,b]$; so che $\alpha'(t_0) \neq 0$

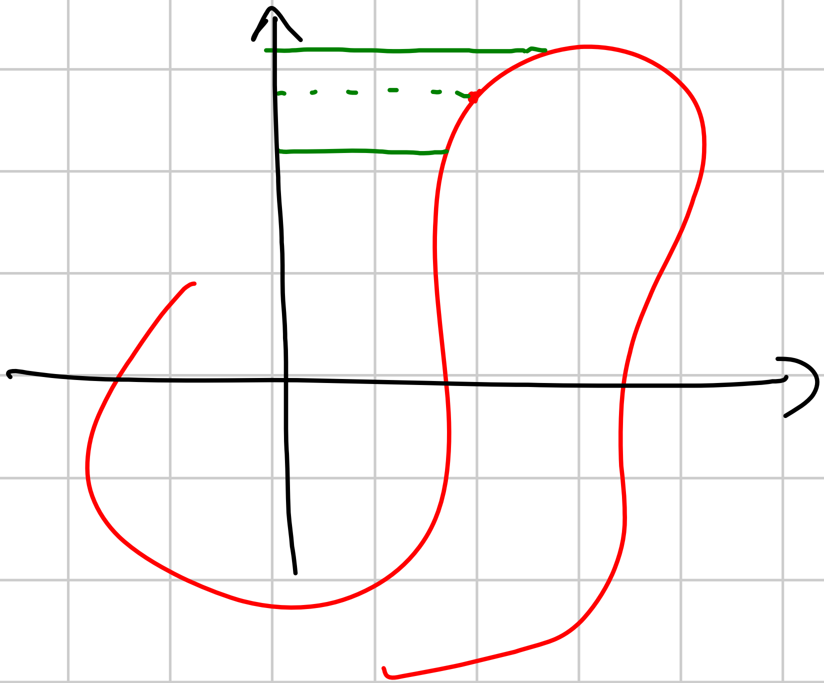
$\Rightarrow$ o $X'(t_0) \neq 0$ o $Y'(t_0) \neq 0$.

$\left(\alpha = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \right)$.

Se $X'(t_0) \neq 0 \implies$ vicino a t_0 la X cresce o decresce $\implies$ la proiez. sull'asse x è iniettiva vicino a t_0 $\implies$ localmente la curva è grafico di y in funz. di x

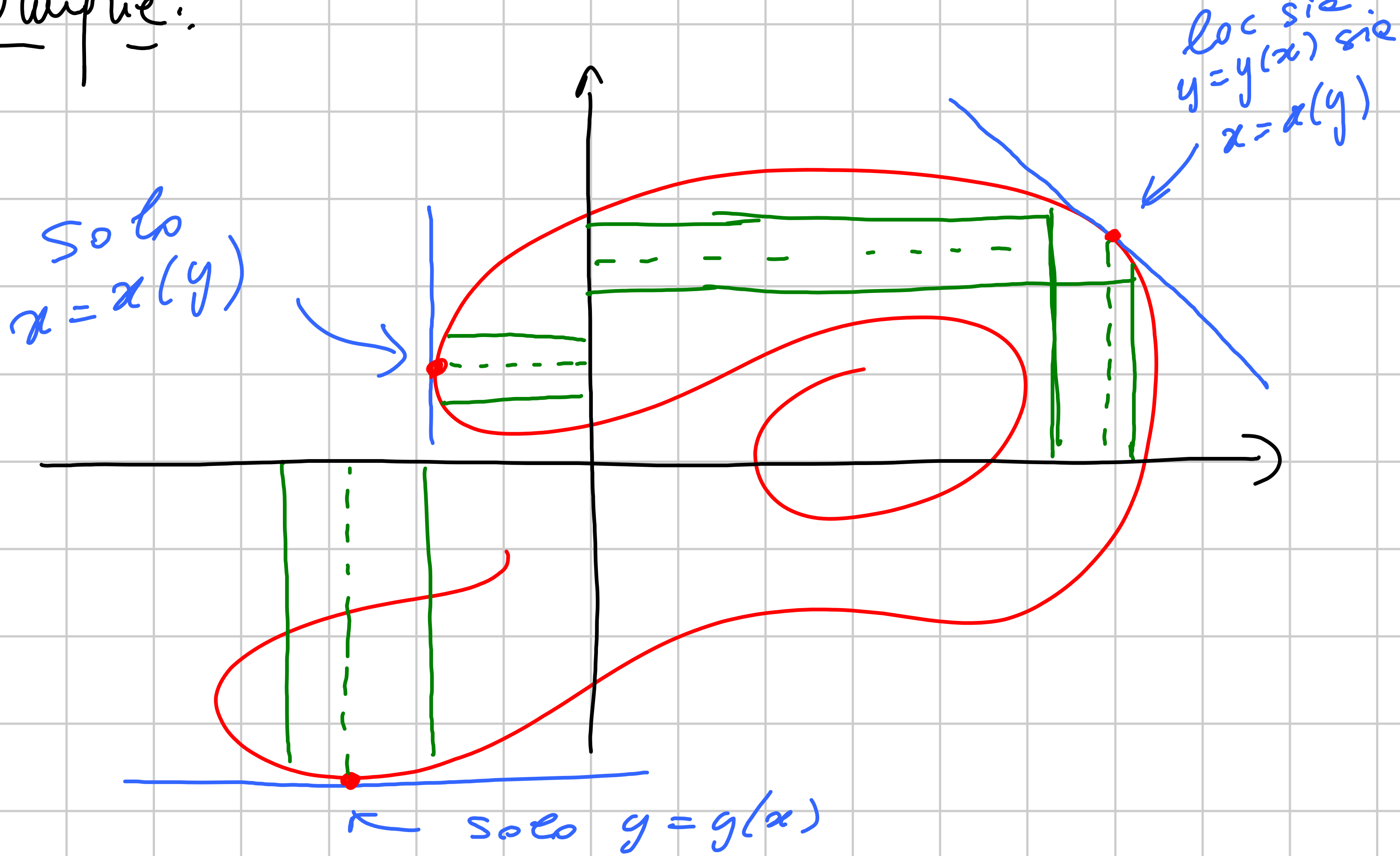


Se $Y'(t_0) \neq 0 \implies$ vicino a t_0 la Y cresce o decresce



$\Rightarrow$ la curva è grafico di x in funz. di y.

Dunque:



LUOGHI DI ZERI

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$\Gamma = \{ (x,y) : f(x,y) = 0 \}$

Non è sempre una curva: $f(x,y) = x^2 + y^2$ punto

$f(x,y) = x^2 - y^2$ 2 rette inc.

<u>Teo</u> (Dimi): sia $(x_0, y_0) \in \Gamma$;

•) se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ allora vicino a (x_0, y_0)

Γ è il grafico di $y = Y(x)$ con

$$Y'(x) = - \frac{\partial f/\partial x\,(x, Y(x))}{\partial f/\partial y\,(x, Y(x))}$$

•) se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ allora vicino a (x_0, y_0)

Γ è grafico di $x = X(y)$ e

$$X'(y) = - \frac{\partial f/\partial y\,(X(y), y)}{\partial f/\partial x\,(X(y), y)} .$$

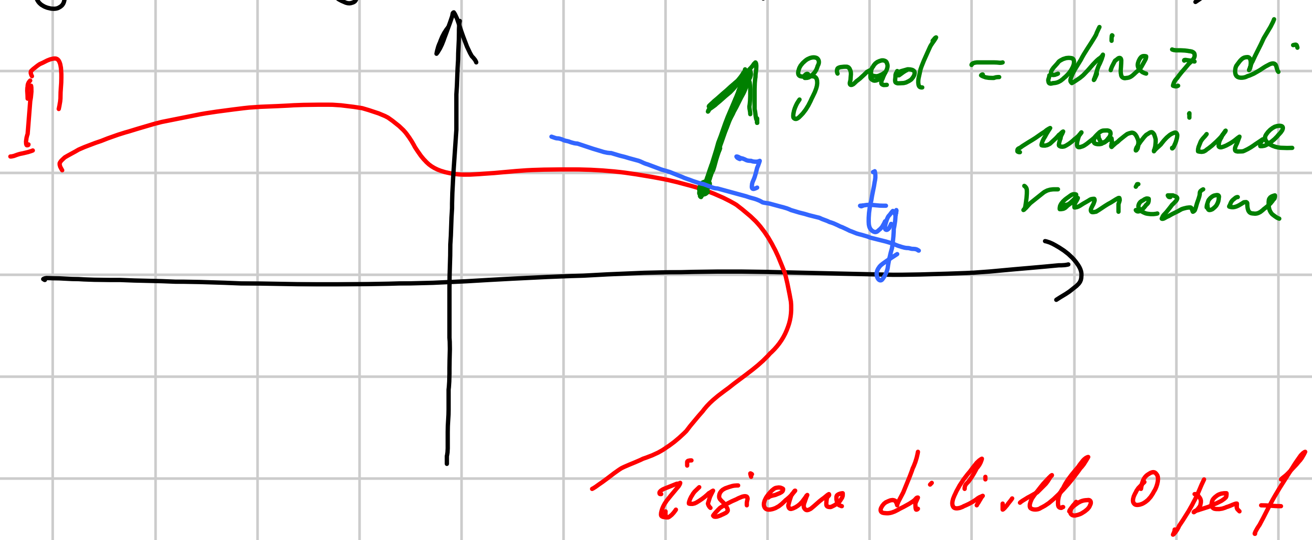
<u>Cor</u>: se $\operatorname{grad} f \neq 0$ in ogni punto di Γ allora Γ è una curva. Di più:

tangente a Γ in (x_0,y_0):

$$(x, Y(x))' = \left(1, -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}\right) \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$(X(y), y)' = \left(-\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial x}, 1\right) \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$\Longrightarrow$ l'ortogonale al gradiente di f in (x_0,y_0) —



Come ricordare le espressioni di X' e Y' nel Teo Dini:

caso $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ $\Rightarrow$ $(x, Y(x)) \in \Gamma$ per x vicino a x_0

$\Rightarrow f(x, Y(x)) = 0$: derivo :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Y'(x) = 0$$

$$\Rightarrow Y'(x) = - \frac{\partial f/\partial x \, (x, Y(x))}{-\partial f/\partial y \, (x, Y(x))} .$$

caso $\dfrac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ $\qquad f(X(y), y) = 0$ per y vicino a y_0

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \cdot X' + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 1 = 0$$

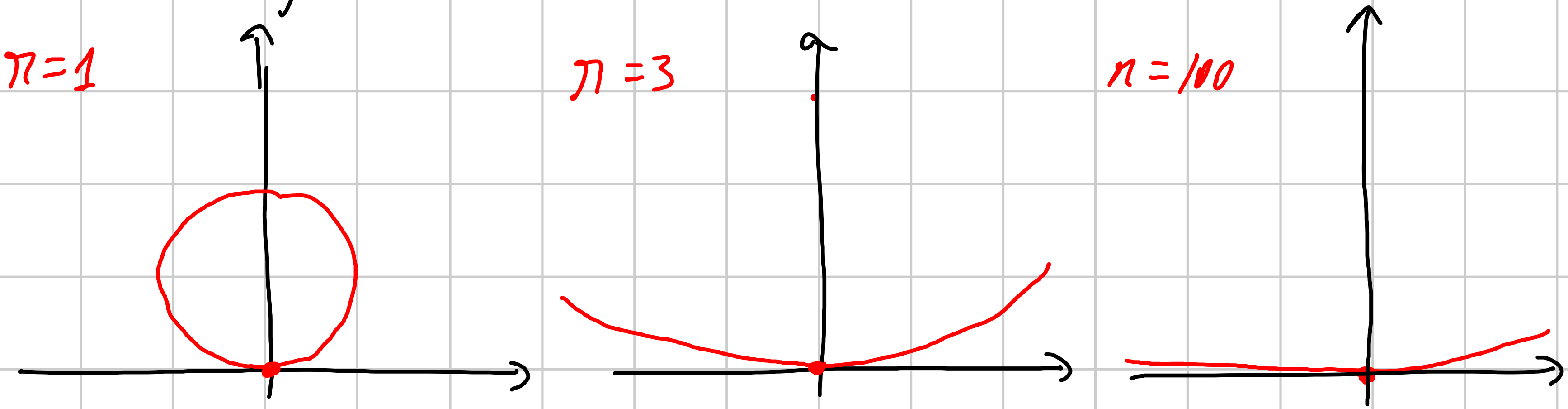
$$\Rightarrow X'(y) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(X(y), y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(X(y), y)}$$

———— ∘ ————

CURVATURA DI UNA CURVA

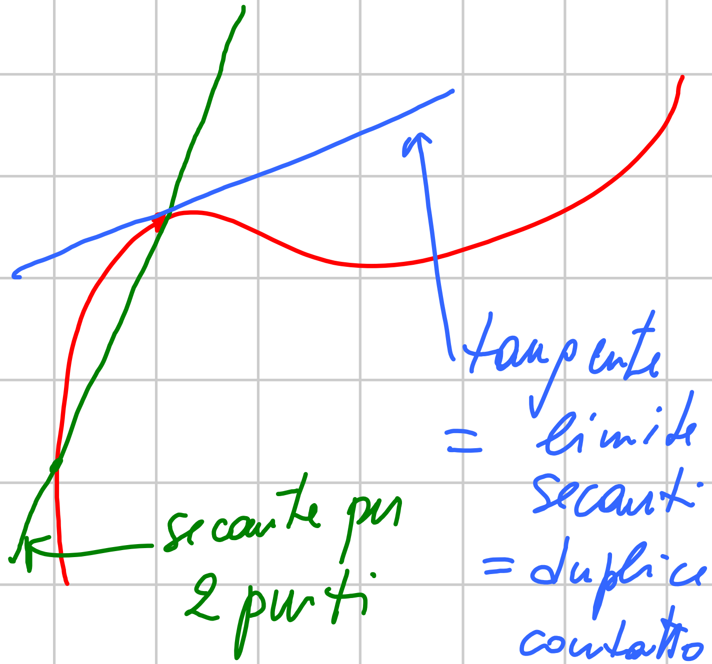
= "misura numerica di quanto è lontana dall'essere dritta"

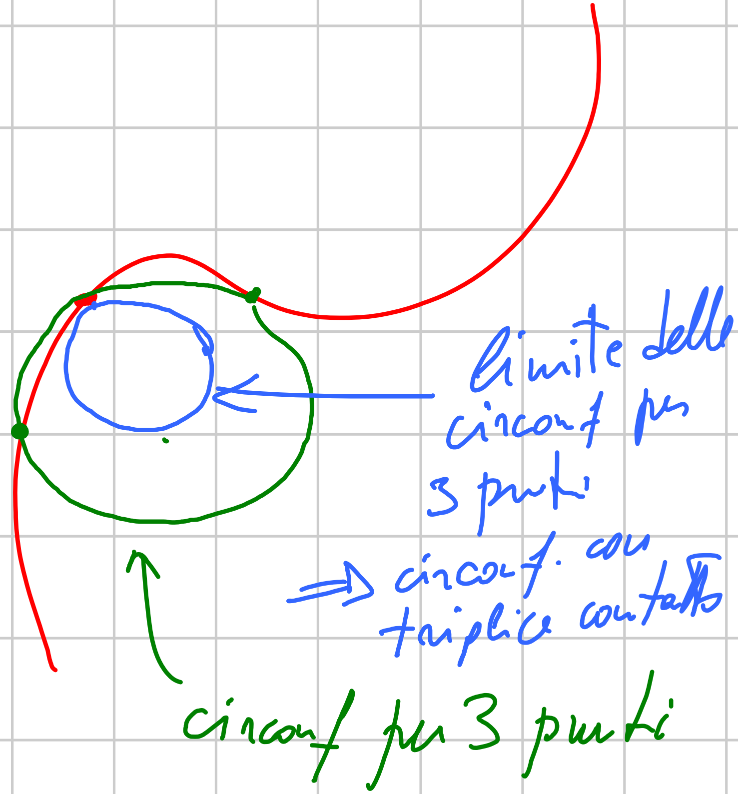
Per circonferenze :



$$\text{curvatura} = \frac{1}{r} .$$

Per curve generali :


tangente
= limite secanti
= duplice contatto
secante per 2 punti


limite delle circonf per 3 punti
⇒ circonf. con triplice contatto
circonf per 3 punti

Proposizione: sia α una curva in parametro d'arco ($\|\alpha'(t)\| \equiv 1$) e $t_0 \in [a,b]$. Se $\alpha''(t_0) \neq 0$ la circonferenza passante per $\alpha(t_0)$ e avente centro $\alpha(t_0) + \dfrac{\alpha''(t_0)}{\|\alpha''(t_0)\|^2}$ ha triplice contatto con α in t_0.

Def: tale circonferenza è detta osculatrice.

Oss: il raggio della circonf. osculatrice è

$$\left\| \alpha(t_0) + \frac{\alpha''(t_0)}{\|\alpha''(t_0)\|^2} - \alpha(t_0) \right\| = \frac{1}{\|\alpha''(t_0)\|}.$$

Dunque la circonferenza che approssima meglio la curva α in $\alpha(t_0)$ ha raggio $1/\|\alpha''(t_0)\|$.

$\Rightarrow$ chiamiamo curvatura di α in $\alpha(t_0)$ la quantità $\kappa = \|\alpha''(t_0)\|$

<u>Attenzione</u>: •) <u>Per</u> α orientata daremo un segno a κ

•) La formula $\kappa = \|\alpha''\|$ vale <u>solo</u> per α in p.d'a.

Lem: sia $v : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ t.c. $\|v(t)\| = 1 \ \forall t$.

Allora $v'(t) \perp v(t) \ \forall t$.

Dim: So che $\|v(t)\|^2 \equiv 1$

cioè $v_1(t)^2 + v_2(t)^2 + \dots + v_n(t)^2 \equiv 1$;

derivo; $2 v_1(t) \cdot v_1'(t) + \dots + 2 v_n(t) \cdot v_n'(t) \equiv 0$

$\Rightarrow 2 \langle v(t) | v'(t) \rangle = 0$ $\square$

Es: $v(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \Rightarrow v'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$

$$\|v(t)\| \equiv 1 \quad ; \quad \langle v(t) \mid v'(t) \rangle \equiv 0 \,.$$