# Geometria 12/3/14

$V$ sp. vett. su $\mathbb{R}$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle$ e $\| \cdot \|$.

Ortogonale e $S \subset V$

$$S^\perp = \{ v \in V : \langle v | s \rangle = 0 \quad \forall s \in S \}$$

<u>Oss</u>: $S^\perp$ è sempre un sottospazio:

$\langle v_1 | s \rangle = \langle v_2 | s \rangle = 0 \quad \forall s \in S \Rightarrow \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 | s \rangle = 0 \quad \forall s$
(lin sx)

Oss: $S^\perp = (\mathrm{Span}(S))^\perp$

Infatti: $\supset$ ✓

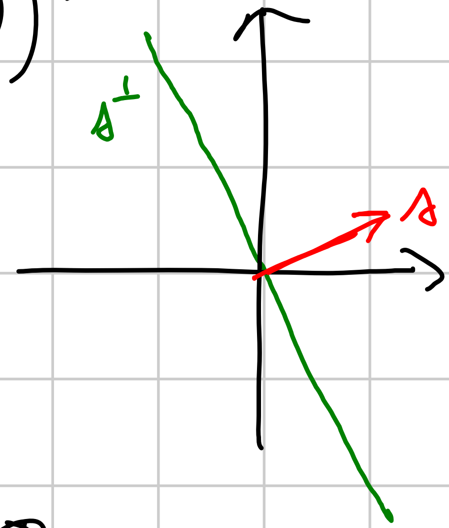
$\subset$ : $\langle v|s\rangle = 0 \quad \forall s \in S$

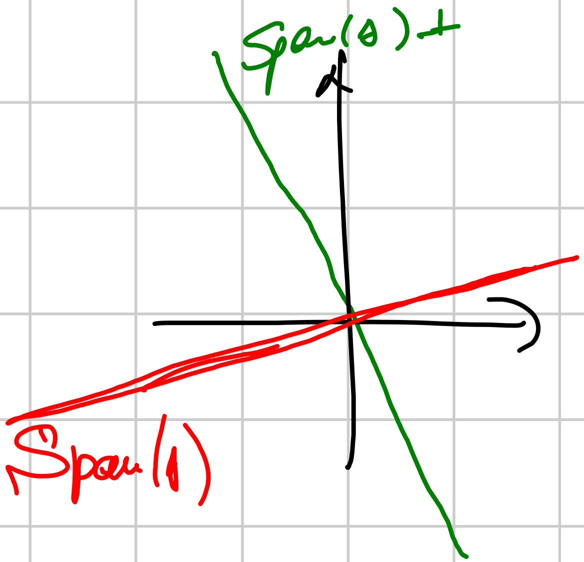
$\Rightarrow \langle v | \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k \rangle = 0$

$\forall \lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$

$s_1 \dots s_k \in S$ (lin. a dx)

$\Rightarrow v \in (\mathrm{Span}(S))^\perp$



Caso $V = \mathbb{R}^3$:

- $\{0\}^\perp = \mathbb{R}^3$ ; $(\mathbb{R}^3)^\perp = \{0\}$
- rette : $l$ retta $\Rightarrow$ $l^\perp$ piano
- piani : $P$ piano $\Rightarrow$ $P^\perp$ retta

Dunque l'ortogonalità dà una corrispondenza

$$\{\text{rette}\} \longleftrightarrow \{\text{piani}\}$$

$$\ell = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \Rightarrow \ell^{\perp} = \mathrm{Span}\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix}b\\-a\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\0\\-a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\c\\-b\end{pmatrix}}_{\text{posso sempre scartarne uno (non so quale)}}\Bigg)$$

$$P = \mathrm{Span}\Bigg(\underset{v_1}{\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}} \underset{v_2}{\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}}\Bigg) \Rightarrow P^{\perp} = \mathrm{Span}\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix}b_1c_1 - b_2c_1\\-(a_1c_2 - a_2c_1)\\a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix}}_{v_1 \wedge v_2}\Bigg)$$

prodotto vettoriale di $v_1$ e $v_2$ $(v_1 \times v_2)$

**Fatto:** $v_1 \wedge v_2$ è definito $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$;

è nullo se $v_1$ e $v_2$ sono lin. dipendenti;

altrimenti è un generatore della retta ortogonale al piano generato da $v_1$ e $v_2$;

inoltre $\|v_1 \wedge v_2\|$ = area 

;

infine $v_1, v_2, v_1 \wedge v_2$ formano una terna levogira.
(regola mano destra).

<u>Oss</u>: eq. cart. di piano $P$

cioè

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : ax + by + cz = 0 \right\}$$

cioè

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

cioè

$$P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^{\perp} = \left( \operatorname{Span} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)^{\perp}$$

cioè

$$P^{\perp} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Dunque: eq. cart. di piano $P \longleftrightarrow$ eq. param. retta $P^\perp$

Analogamente: eq. cart. di retta $l$

$$l = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_2 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{array} \right\}$$

cioè
$$l = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

cioè
$$l = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\}^\perp = \left( \mathrm{Span}\left( \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) \right)^\perp$$

cioè $\ell^{\perp} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}\right)$; dunque:

eq. cart. retta $\ell$ $\longleftrightarrow$ eq. param. del piano $\ell^{\perp}$

Visto: i passaggi

eq. param. piano $P$ $\longrightarrow$ eq. cart. di $P$

eq. cart. retta $\ell$ $\longrightarrow$ eq. param. di $\ell$

sono bastati semplici calcoli (regola dei det $2\times 2$).

Ragione: usando la corrispondenza $\{\text{rette}\} \xleftrightarrow{\perp} \{\text{piani}\}$:

eq. param. piano $P \xrightarrow{\wedge}$ eq. param. retta $P^{\perp} \xrightarrow{\perp}$ eq. cart. di $P$

eq. cart. retta $\ell \xrightarrow{\perp}$ eq. param. piano $\ell^{\perp} \xrightarrow{\wedge}$ eq. param. $\ell$.

---

Caso generale $V$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

<u>Oss</u>: se $W \subset V$ è s/sp. allora $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.

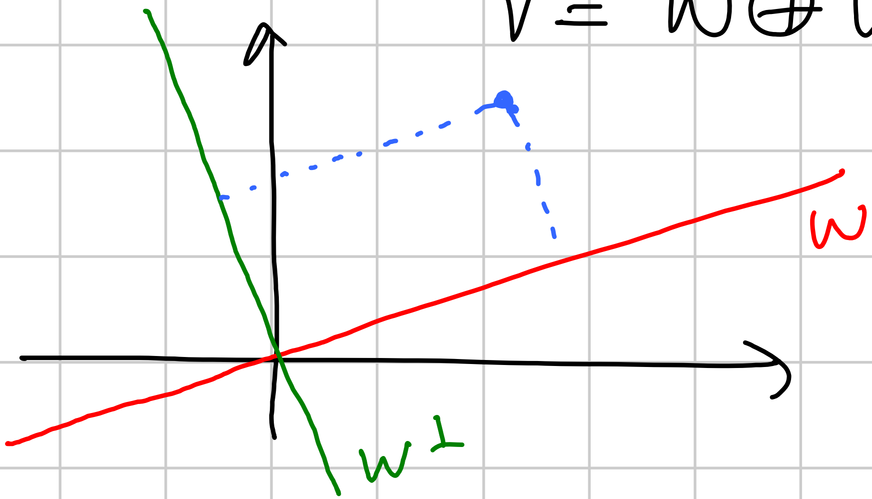
Infatti se $v \in W \cap W^\perp$ ho $\langle v | v \rangle = 0$

$\underset{W}{\cap} \quad \underset{W^\perp}{\in}$

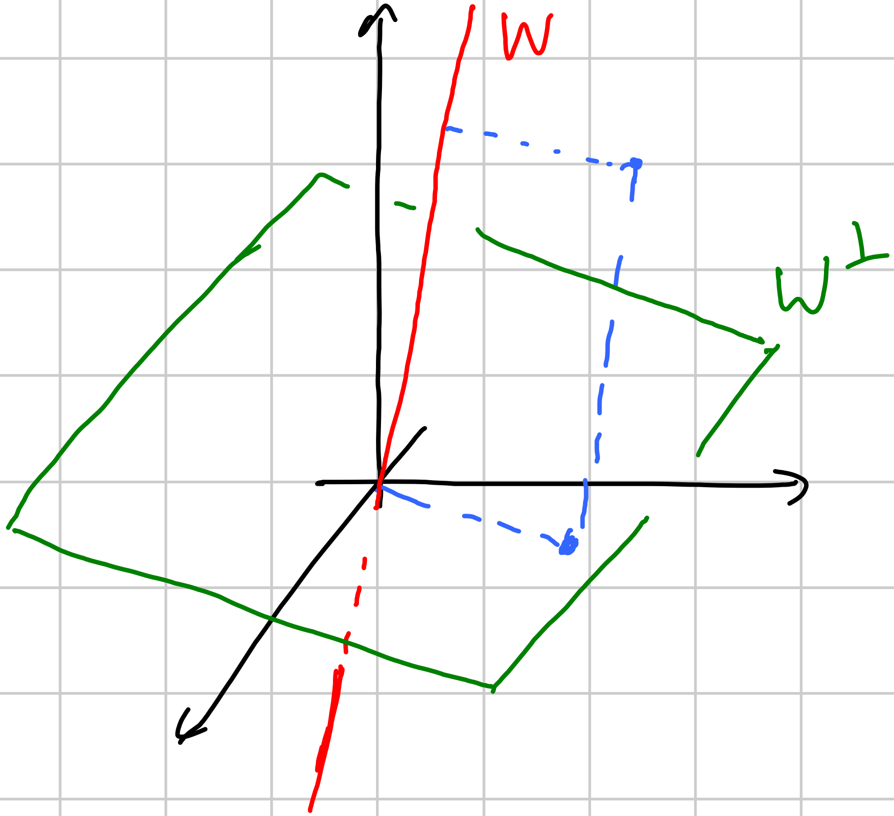
dunque $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$ _

<u>Prop</u>: Se $V$ ha dimensione finita allora

$$V = W \oplus W^\perp$$ _




$\mathbb{R}^2 = W \oplus W^\perp$




$$\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$$

Dim.: sappiamo $W \cap W^{\perp} = \{0\}$; però
$W + W^{\perp} = V$ non è immediato
(falso in dimensione infinita).

In dim. finita:

Posso scegliere base $u_1, \dots, u_k$ di $W$ e
completare a base $u_1, \dots, u_k, z_{k+1}, \dots, z_n$ di $V$;
ortonormalizzo tale base, trovando

$$\underbrace{w_1, \dots, w_k}_{\text{base di } W}, v_{k+1}, \dots, v_n$$

(dipende dal procedimento G-S)

Affermo che $W^\perp = \mathrm{Span}(v_{k+1}, \dots, v_n)$, da cui la tesi;

infatti $v = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k + \beta_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \beta_n v_n$

$v \in W^\perp \Longleftrightarrow (v \mid w_j) = 0$ per $j = 1 \dots k$ (prima Oss di oggi)

ma $\langle v \mid w_j \rangle = \alpha_j$, dunque

$v \in W^\perp \Longleftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0 \Longleftrightarrow v \in \mathrm{Span}(v_{k+1}, \dots, v_n)$. $\blacksquare$

# Cenni di calcolo differenziale in più variabili

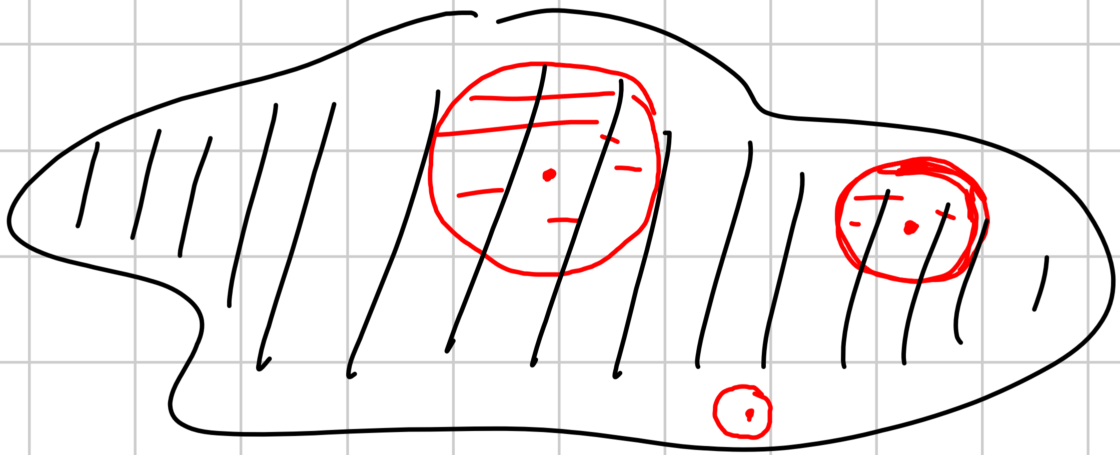
Ricordo: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ , $f'(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$

$f''(x)$ = derivata prima di $f'(x)$

Sappiamo: $x$ min rel $\Rightarrow f'(x)=0,\ f''(x)\geq 0$

$f'(x)=0,\ f''(x)>0 \Rightarrow x$ min rel.

Def: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è aperto se $\forall x \in \Omega \ \exists r > 0$ t.c. la palla di centro $x$ e raggio $r$ $\{ y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r \}$ è contenuta in $\Omega$.



(esclusa la linea esterna)

Per oggi: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sarà aperto.

Def: data $f: \Omega \to \mathbb{R}$ e $x \in \Omega$ chiamo derivata parziale $j$-esima di $f$ in $x$, se esiste

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + t e_j) - f(x)}{t}, \text{ indicata con } \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Cioè: è il limite del rapporto incrementale ottenuto incrementando solo la variabile $x_j$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ è la derivata di $f$ considerando $x_j$ come variabile e le altre coordinate come parametri fissi.

$\underline{Es}$ : $f(x,y) = e^{x^2y} \cdot \cos(2xy^2 - 3x + 7y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \cdot e^{x^2y} \cdot \cos(2xy^2 - 3x + 7y^2)$$

$$+ e^{x^2y} \cdot (-\sin(2xy^2 - 3x + 7y^2)) \cdot (2y^2 - 3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{x^2y} \cdot \cos(\,) + e^{x^2y} \cdot (-\sin(\,)) \cdot (4xy + 14y)$$

Es: $f(x,y,z) = \ln\left(1 + (z^3 + 3xy)\cdot \sin(x^2 + yz + 7z^2)\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{(\ \dots\ )} \cdot \left( (3z^2)\cdot \sin(\dots) + (z^3 + 3xy) \cdot \cos(\dots)\cdot(y + 14z) \right)$$

Def: data $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $x \in \Omega$ definisco il gradiente di $f$ in $x$ come

$$\operatorname{grad}_x(f) = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x_1(x) \\ \vdots \\ \partial f/\partial x_n(x) \end{pmatrix}$$

Def: $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $x \in \Omega$, $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$

chiamo derivata direzionale di $f$ in $x$ nella direzione $v$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

Oss: $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ è la derivata nella direz. $e_j$

Fatto: se tutte le $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ esistono continue in $\Omega$

allora $$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial v}(a)}_{\text{tasso di crescita di } f \text{ nella direz } \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cdot v_j}_{\text{somma pesata dei tassi di crescita nelle direzioni } x_j \text{ con peso } v_j}$$

Regola di derivazione di funzione composta:

sappiamo $$\frac{d\left(g(f(x))\right)}{dx} = \frac{dg}{dy}\left(f(x)\right) \cdot \frac{df}{dx}(x).$$

In più variabili:

$$\frac{\partial g(f_1(x), \dots, f_k(x))}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_j}(\dots) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

<u>Def</u>: derivate seconde parziale:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

Matrice hessiana:

$$H_x f = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots n}}$$

Fatto: se tutte le $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ esistono continue su $\Omega$ allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$ cioè $H_x f$ è simmetrica.

Es: $f(x,y) = (3x^2y + 7xy^3) + \sin(1+3x+5y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (6xy + 7y^3) + \cos(1+3x+5y^2)\cdot 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (3x^2 + 21xy^2) + \cos(1+3x+5y^2)\cdot 10y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y - 9\sin(1+3x+5y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x + 21y^2 - 3\sin(1+3x+5y^2)\cdot 10y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x + 21y^2 - \sin(1+3x+5y^2)\cdot 3 \cdot 10y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 42xy - \sin(\ldots)\cdot 100y^2 + 10\cdot\cos(\ldots) -$$

Sappiamo: in una variabile (Taylor II ordine):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + o\left(|x-x_0|^2\right)$$

In più variabili:

**Fatto**: Se tutte le $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ esistono continue in $\Omega$, $x \in \Omega$ allora

$$f(x+v) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cdot v_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot v_i v_j + o(\|v\|^2)$$

**Oss**: posso riscriverla come:

$$f(x+v) = f(x) + \langle \operatorname{grad}_x f \mid v \rangle_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{2} \langle v \mid v \rangle_{H_x f} + o(\|v\|^2).$$

Idea della dimostrazione (usando Taylor in una variabile):

Pongo $u = \frac{v}{\|v\|}$, $t = \|v\|$ $(\Rightarrow v = t \cdot u)$,

fingo che $u$ sia fisso e applico Taylor in una var

$$g(t) = f(x+tu) = f(x+v) \quad :$$

$$\underset{\substack{\| \\ f(x+tv)}}{g(t)} = \underset{\substack{\| \\ f(x)}}{g(0)} + g'(0)\cdot t + \frac{1}{2} g''(0)\cdot t^2 + o(t^2).$$

$$g'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+tv)\cdot v_j$$

(regola derivaz. funz. composte)

$$g''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+tv)\cdot v_i v_j$$

$$\Rightarrow f(x+tv) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cdot \underbrace{t u_j}_{= v_j}$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot \underbrace{(t u_i)}_{v_i} \cdot \underbrace{(t u_j)}_{v_j} + o(\underbrace{t^2}_{\|v\|^2})$$

**Fatto:** data $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $x \in \Omega$

$x$ min. loc $\Longrightarrow \mathrm{grad}_x f = 0$, $H_x f \geqslant 0$

$\mathrm{grad}_x f = 0$, $H_x f > 0 \Longrightarrow x$ min. loc.

$\langle \cdot | \cdot \rangle_{H_x f}$ def. pos.

$\langle v | v \rangle_{H_x f} \geqslant 0$ $\forall v \in V$

Vedremo come verificare in pratica
se tali condizioni sono soddisfatte