Geometria 7/3/16

Visto: $v_1, \dots, v_n$ base ortogonale di V
$u \in V$, $\langle u | v_j \rangle = 0$ $j = 1 \dots n$ $\Longrightarrow$ $u = 0$

Teo: $v_1, \dots, v_n$ base ortogonale $\Longrightarrow v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v | v_j \rangle}{\| v_j \|^2} \cdot v_j$.

Dimo: posto $u = v - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v | v_j \rangle}{\| v_j \|^2} \cdot v_j$

devo vedere che $u=0$; basta vedere che $\langle u | v_i \rangle = 0$ $\forall i$:

$$\langle u | v_i \rangle = \left\langle v - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v | v_j \rangle}{\|v_j\|^2} \cdot v_j \,\middle|\, v_i \right\rangle$$

$$\underset{\text{lin. sx}}{=} \langle v | v_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v | v_j \rangle}{\|v_j\|^2} \cdot \underbrace{\langle v_j | v_i \rangle}_{\substack{\text{nullo per } j \neq i \\ \text{vale } \|v_i\|^2 \text{ per } j = i}}$$

$$= \langle v | v_i \rangle - \frac{\langle v | v_i \rangle}{\cancel{\|v_i\|^2}} \cdot \cancel{\|v_i\|^2}$$

$$= 0. \quad \blacksquare$$

Esempio:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -1 \\ 26 \\ -11 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$:

$$\left.\begin{array}{l} \langle v_1 | v_2 \rangle = 12 - 2 - 10 = 0 \\ \langle v_1 | v_3 \rangle = -4 + 26 - 22 = 0 \\ \langle v_2 | v_3 \rangle = -3 - 52 + 55 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{ortog. fra loro,} \\ \text{non nulli} \\ \Longrightarrow \text{lin. indip.} \\ \Longrightarrow \text{base} \end{array}$$

$$\left[\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (-12+5+2)/(16+1+4) \\ (-9-10-5)/(9+4+25) \\ (3+130-11)/(1+576+121) \end{pmatrix}.$$

Def: chiamo ortonormale una base $v_1, \dots, v_n$ t.c. $\langle v_i | v_j \rangle = 0$ per $i \neq j$ (ortogonale) e $\|v_i\| = 1$ (ogni v_i è unitario).

Oss: Se $v_1, \dots, v_n$ è base ortonormale allora $v = \sum_{j=1}^{n} \langle v | v_j \rangle \cdot v_j$.

Teo (procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt):

Data una base $v_1, \dots, v_n$ di V (sp. vett con $\langle \cdot | \cdot \rangle$)

il seguente procedimento giunge a termine
e fornisce una base ortonormale $u_1, \dots, u_n$ di $\overline{V}$:

- $u_1 = v_1 / \|v_1\|$
- $\tilde{u}_2 = v_2 - \langle v_2 | u_1 \rangle \cdot u_1$, $u_2 = \tilde{u}_2 / \|\tilde{u}_2\|$
- $\tilde{u}_3 = v_3 - \langle v_3 | u_1 \rangle \cdot u_1 - \langle v_3 | u_2 \rangle \cdot u_2$, $u_3 = \tilde{u}_3 / \|\tilde{u}_3\|$

...

- costruiti $u_1, \dots, u_k$ si pone

$$\tilde{u}_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1} | u_i \rangle \cdot u_i \quad , \quad u_{k+1} = \frac{\tilde{u}_{k+1}}{\|\tilde{u}_{k+1}\|}$$

<u>Oss</u>: "giunge a termine": durante la costruzione ogni $\tilde{u}_k$ è $\neq 0$, dunque non si divide mai per 0.

<u>Esempio</u>:

$$\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}} \quad \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{62}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{62}} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{62}} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-10}{62} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{31} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{31} \begin{pmatrix} 134 \\ -58 \\ 46 \end{pmatrix}$$

($u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|}$ deve essere ortogonale a $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, quindi $\tilde{u}_2$ deve essere ortogonale a v_1 :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 134 \\ -58 \\ 46 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 268 - 406 + 138 = 0 \checkmark$$

$$u_2 = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{134^2 + 58^2 + 46^2}}_{1}} \cdot \begin{pmatrix} 134 \\ -58 \\ 46 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{62} \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + $$

$$u_3 = \tilde{u}_3 / \|\tilde{u}_3\|$$

$$\hookrightarrow -\frac{1}{7}\cdot\left\langle\begin{pmatrix}6\\3\\-1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}134\\-58\\46\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\begin{pmatrix}134\\-58\\46\end{pmatrix}$$

(vedremo come evitare di calcolare u_3).

<u>Dimo</u>: Proviamo che costruiti $u_1, \dots, u_k$ si ha che $\tilde{u}_{k+1}$ è $\neq 0$ e ortogonale a $u_1, \dots, u_k$.
Ciò basta. Per farlo affermiamo inoltre che $\mathrm{Span}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$.
(Formalmente: per induzione).

Ultimo fatto : $k = 1$ $\qquad u_1 = v_1 / \|v_1\|$ ✓

Intuitivamente $\tilde{u}_{k+1} = v_{k+1} + \underbrace{(\qquad)}_{\text{comb. lin. di } u_1, \dots, u_k}$

$$\in \operatorname{Span}(u_1, \dots, u_k) = \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Span}(u_1, \dots, u_k, \tilde{u}_{k+1}) = \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}).$$

Poiché $v_{k+1} \notin \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_k)$ ho $\tilde{u}_{k+1} \neq 0$

$\Rightarrow u_{k+1}$ si può definire e

$$\mathrm{Span}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}).$$

Resta: $\langle \tilde{u}_{k+1} | u_i \rangle = 0$ per $i = 1 \dots k$

$$\|$$

$$\left(v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1} | u_j \rangle \cdot u_j \;\middle|\; u_i \right)$$

$$\|$$

$$\langle v_{k+1} | u_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1} | u_j \rangle \cdot \underbrace{\langle u_j | u_i \rangle}_{\delta_{ij}}$$

$$= \langle v_{k+1} | u_i \rangle - \langle v_{k+1} | u_i \rangle = 0 .$$

(per ipotesi induttiva $u_1, \dots, u_k$ sono ortonormali) $\blacksquare$

<u>Oss</u>: la proprietà $\mathrm{Span}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ corrisponde al fatto che la matrice di cambio di base è del tipo:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & & \vdots \\ \vdots & 0 & * & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix}$$

triangolare superiore ;

inoltre essendo $u_{k+1} = \dfrac{v_{k+1} - \cdots\cdots}{\| \cdots\cdots \|}$

dunque sulla diagonale principale ho coeff > 0.

Cor: Se $W \subset V$ è un sottospazio di dimensione finita, data una base di W ortonormalizzandola trovo una base ortonormale di W.

Cor: Se V ha dimensione finita,

un sistema ortogonale di vettori non nulli di V si può completare a una base ortogonale. Infatti:

$v_1, \dots, v_k$ ortog. non nulli ($\Rightarrow$ lin. indip)

— completo a $v_1, \dots v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ base a caso

— ortonormalizzo trovando

$$\underbrace{u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \; u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, u_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}}, \; u_{k+1}, \dots, u_n$$

Siccome $v_1, \dots, v_k$ erano già ortogonali,
l'unico effetto di G-S è normalizzarli

— ripristino $v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ —

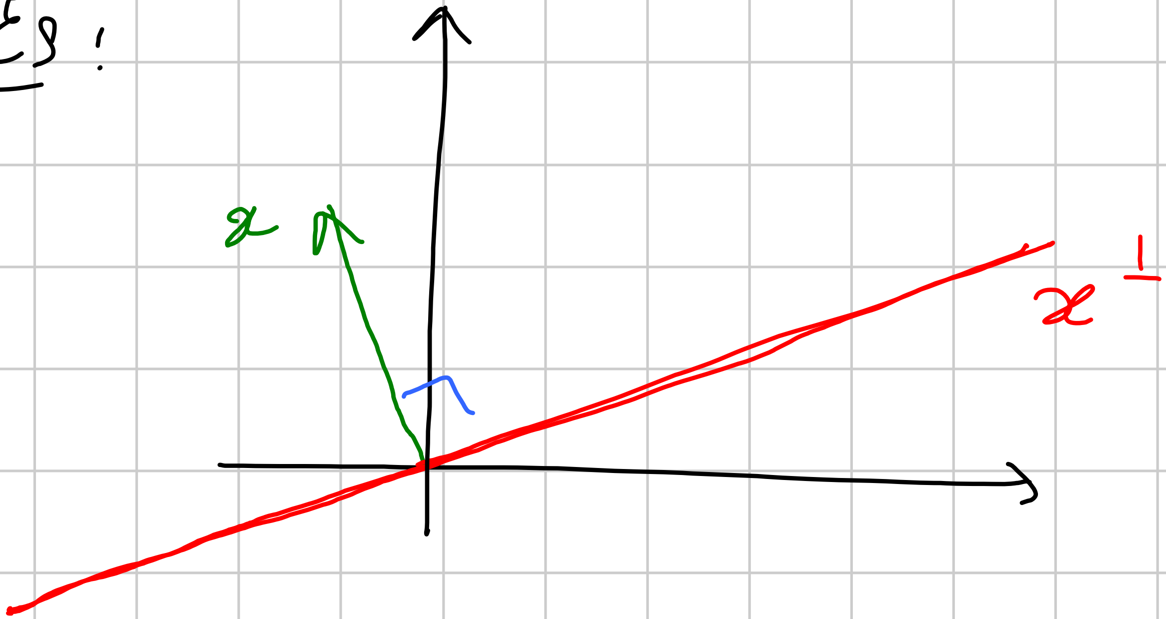
Def: (V sp. vett. su $\mathbb{R}$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle$).

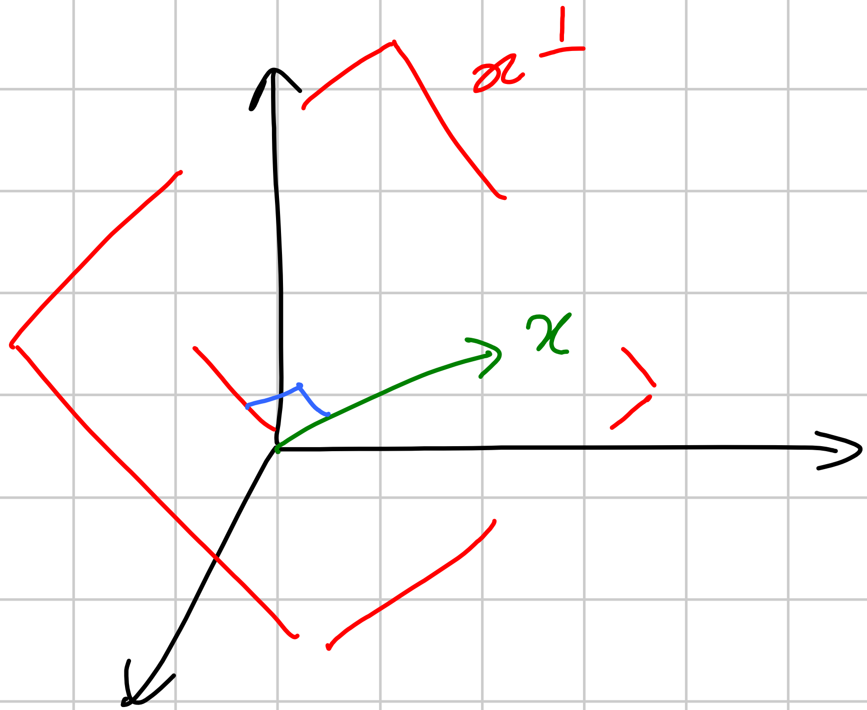
Se $X \subset V$ è un sottoinsieme pongo

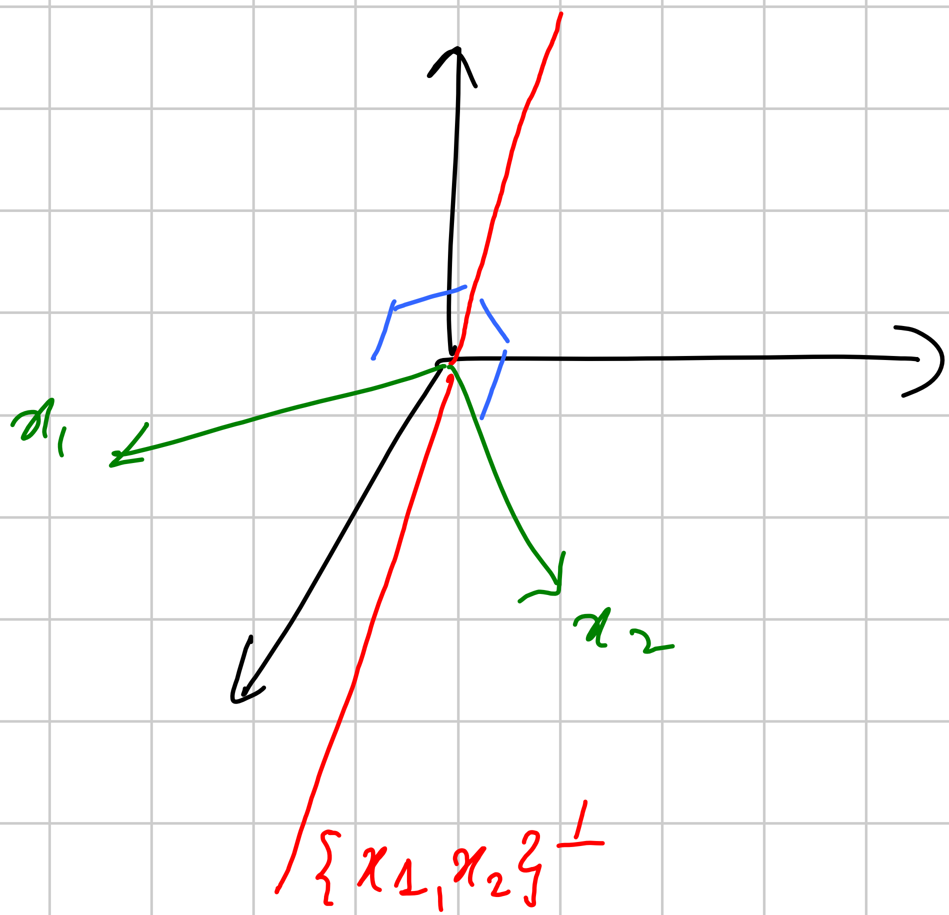
$$X^\perp = \{ v \in V : \langle v | x \rangle = 0 \quad \forall x \in X \}$$

= l'insieme di tutti i vettori ortogonali a tutti i vettori di X

Es:




$x^\perp$
x



x_1
x_2
$\{x_1, x_2\}^\perp$