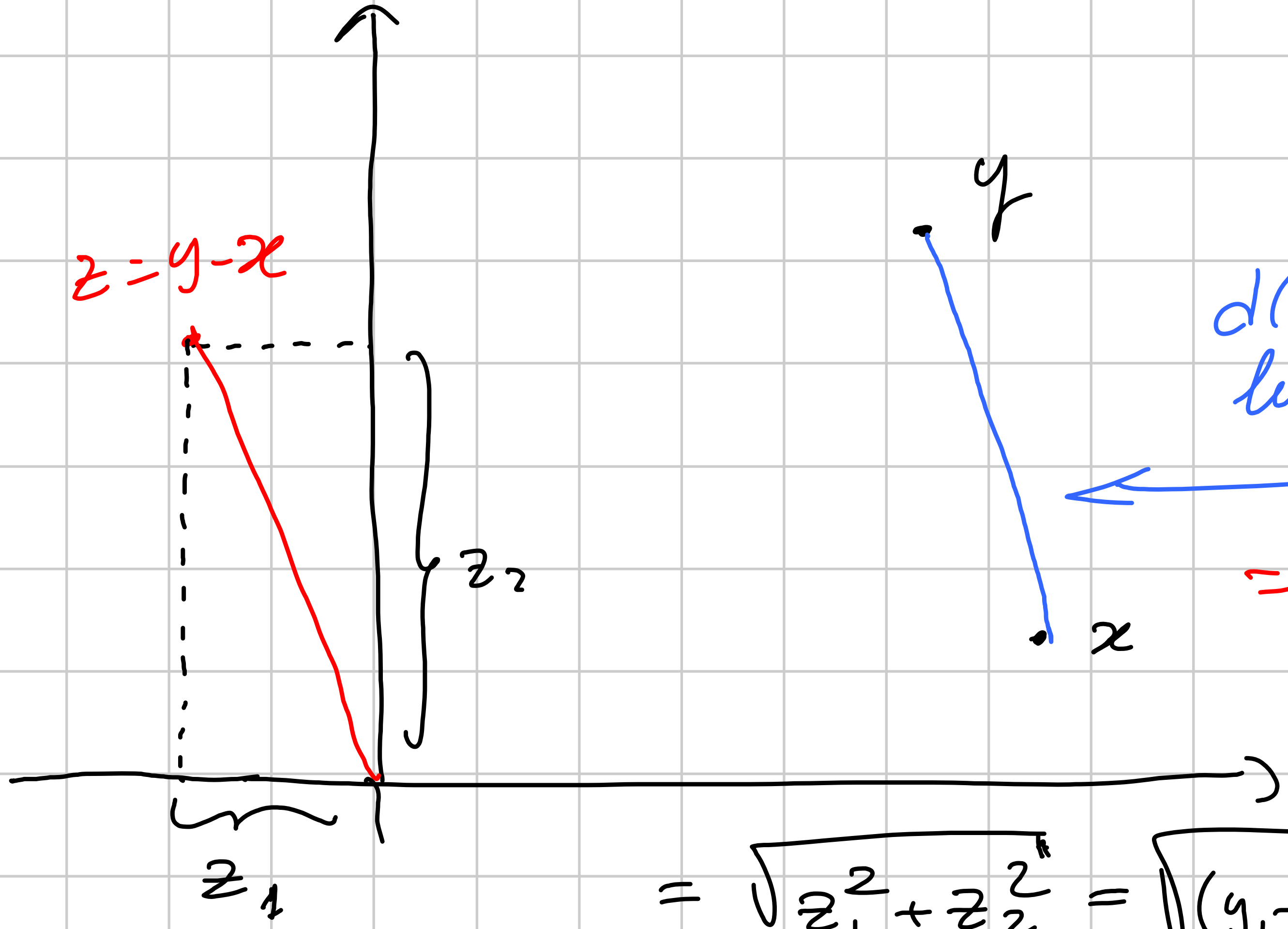
Geometria 5/3/14

Domani lezione in F2 _

<u>Distanza</u> (e angoli) _



$d(x,y) =$ lunghezza

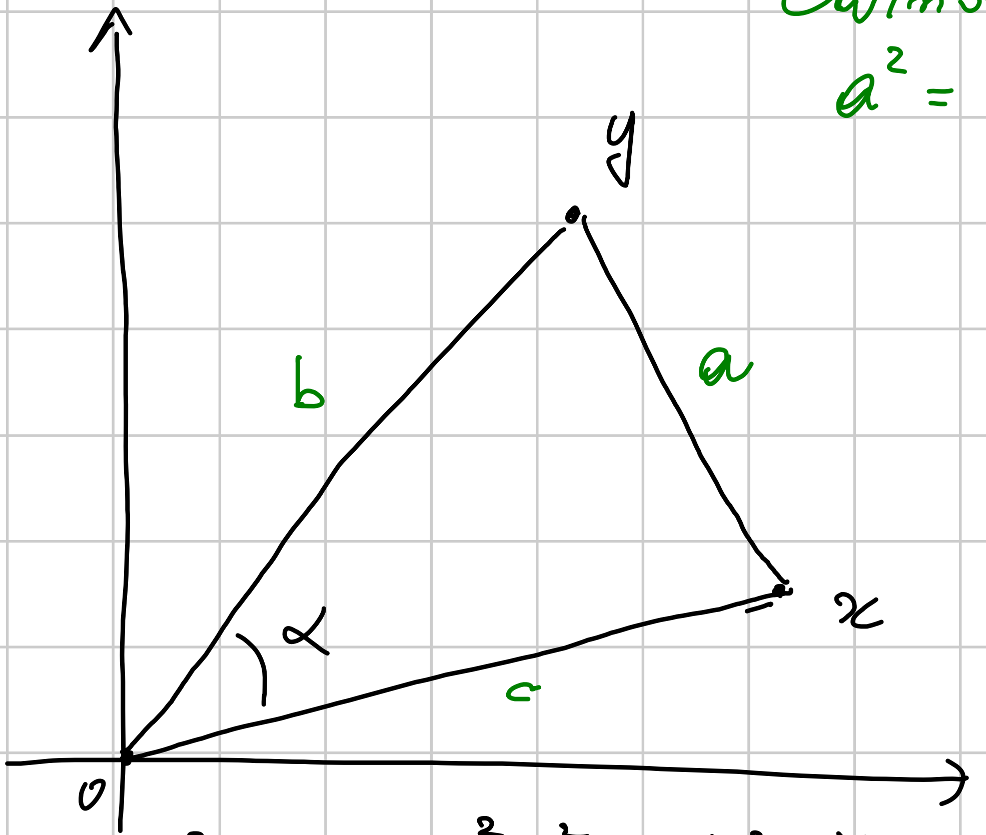
$=$ lunghezza(z)

$$= \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

Angoli

Carnot:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$



$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(y_1^2+y_2^2)+(x_1^2+x_2^2)-\left((y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2\right)}{2\sqrt{y_1^2+y_2^2}\cdot\sqrt{x_1^2+x_2^2}} =$$

$$= \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

Poniamo ora: $\langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^2} = x_1 y_1 + x_2 y_2$

prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^2$ tra x e y

Abbiamo: $d(0, x) = \sqrt{x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2} = \sqrt{\langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^2}}$

$$\cos(\measuredangle(x, y)) = \frac{\langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^2}}{\sqrt{\langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^2}} \cdot \sqrt{\langle y | y \rangle_{\mathbb{R}^2}}}.$$

Morale: $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

(funzione di due argomenti vettoriali e valore scalare)

consente di calcolare distanze e angoli.

Poniamo: $\|x\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{\langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^2}}$

norma del vettore x rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^2$

(la radice ≥ 0)

In $\mathbb{R}^n$ si ripete identico:

$$\langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^n} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$ tra x e y

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

$$= \underbrace{\underset{1 \times n}{(x_1 \ldots x_n)} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}}_{\substack{1 \times 1 \\ \text{(numero)}}} = {}^t x \cdot y.$$

Come sopra: $\|z\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\langle z | z \rangle_{\mathbb{R}^n}}$ (≥ 0)

$$d(x,y) = \|x-y\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\cos(\measuredangle(x,y)) = \frac{\langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|y\|_{\mathbb{R}^n}} .$$

——— ∘ ———

Abbiamo: $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n} : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \longrightarrow \mathbb{R}$

prodotto cartesiano di $\mathbb{R}^n$ con sé stesso
= l'insieme di tutte le coppie (x,y)
con $x, y \in \mathbb{R}^n$

Proprietà:

(1) Bilineare: è lineare in ciascuno dei due argomenti fissato l'altro, cioè:

$$\langle \lambda x + \mu z | y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \lambda \langle x|y \rangle_{\mathbb{R}^n} + \mu \langle z|y \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

(lin. a sx)

$$\langle x \mid \lambda y + \mu z\rangle_{\mathbb{R}^n} = \lambda\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^n} + \mu\langle x|z\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

(lin. a dx)

(Verifica a sx: $\langle \lambda x + \mu z | y\rangle = {}^t(\lambda x + \mu z) \cdot y =$

$= (\lambda \cdot {}^t x + \mu \cdot {}^t z) \cdot y = \lambda \cdot {}^t x \cdot y + \mu \cdot {}^t z \cdot y$

$= \lambda \cdot \langle x|y\rangle + \mu \langle z|y\rangle$.)

(2) Simmetrica: $\langle y|x\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^n}$

(Verifica: $\langle y|x\rangle = {}^t y \cdot x = {}^t({}^t y \cdot x) = {}^t x \cdot y$

$= \langle x|y\rangle$.

numero, dunque uguale al suo trasposto

(Esercizio: ${}^t(\underset{m\times n}{A}\cdot \underset{n\times k}{B}) = {}^t B \cdot {}^t A$.

$$\left({}^t(A\cdot B)\right)_{ij} = (A\cdot B)_{ji} = \sum_{l=1}^{m} a_{jl}\cdot b_{li}$$

$$({}^tB \cdot {}^tA)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} ({}^tB)_{il} \cdot ({}^tA)_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} b_{li} \cdot a_{jl}$$

(3) Definita positiva: $\langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^n} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

(dalle (1) segue $\langle 0 | 0 \rangle = 0$)

(Verifica: $\langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^n} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ positivo per $x \neq 0$.)

Def: Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ una funzione $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ è:

(1) bilineare se $f(\lambda v + \mu w, u) = \lambda f(v,u) + \mu f(w,u)$ $\forall \ldots$ (a sx)

$f(v, \lambda w + \mu u) = \lambda f(v,w) + \mu f(v,u)$ $\forall \ldots$ (a dx)

(2) simmetrica se $f(v,w) = f(w,v)$ $\forall v,w$

(3) definita positiva se $f(v,v) > 0$ $\forall v \neq 0$

(4) un prodotto scalare se valgono (1), (2), (3).

Oss: $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ (il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$) è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$, ma ce ne sono altri (li vedremo): ad es.

$$\langle x|y\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$ lo è.

In generale

$$\langle x|y\rangle = \lambda_1 x_1y_1 + \lambda_2 x_2y_2 + \cdots + \lambda_n x_ny_n$$

lo è purché tutti i λ_j siano positivi.

<u>Esercizio</u>: (1) $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A) \quad \forall A, B$

(2) $tr(A \cdot B \cdot C) \overset{?}{=} tr(A \cdot C \cdot B) \quad \forall A, B, C$

<u>Esempio</u>:

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{M_{m\times m}(\mathbb{R})} : M_{m\times m}(\mathbb{R}) \times M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$(A, B) \longmapsto tr({}^tA B)$$

Affermo che è prodotto scalare (lo diciamo canonico per $M_{m\times m}(\mathbb{R})$).

(1) bilineare : $\langle \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 | B \rangle \overset{?}{=} \lambda_1 \langle A_1 | B \rangle + \lambda_2 \langle A_2 | B \rangle$

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{tr}\left({}^t(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \cdot B\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\left(\lambda_1 {}^t A_1 + \lambda_2 {}^t A_2\right) \cdot B\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\lambda_1 {}^t A_1 B + \lambda_2 {}^t A_2 \cdot B\right) = \lambda_1 \operatorname{tr}\left({}^t A_1 \cdot B\right) + \lambda_2 \operatorname{tr}\left({}^t A_2 \cdot B\right) \checkmark
\end{aligned}
$$

(a dx analogo)

(2) Simmetrico : $\langle B|A\rangle \overset{?}{=} \langle A|B\rangle$

$$\langle B|A\rangle = tr({}^tB\cdot A) = tr({}^t({}^tB\cdot A)) = tr({}^tA\cdot B) = \langle A|B\rangle \checkmark$$

(3) Def. pos. : $\langle A|A\rangle > 0 \quad \forall A \neq 0$:

$$\langle A|A\rangle = tr({}^tA\cdot A) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tA\cdot A)_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} ({}^tA)_{ij} \cdot (A)_{ji}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ji}^2$$

= "la somma dei quadrati di tutti i coefficienti di A" : positiva per $A \neq 0$.

<u>Esempio</u>: $V = C^0([0,1], \mathbb{R})$ oppure $V = \mathbb{R}[x]$

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t) \cdot g(t) \, dt$$

Affermo che è prodotto scalare:

(1) bilineare: $\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 | g \rangle \overset{?}{=} \lambda_1 \langle f_1 | g \rangle + \lambda_2 \langle f_2 | g \rangle$

$$\int_0^1 (\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)) \cdot g(t)\, dt = \lambda_1 \int_0^1 f_1(t) \cdot g(t)\, dt + \lambda_2 \int_0^1 f_2(t) \cdot g(t)\, dt$$

(a dx analogo)

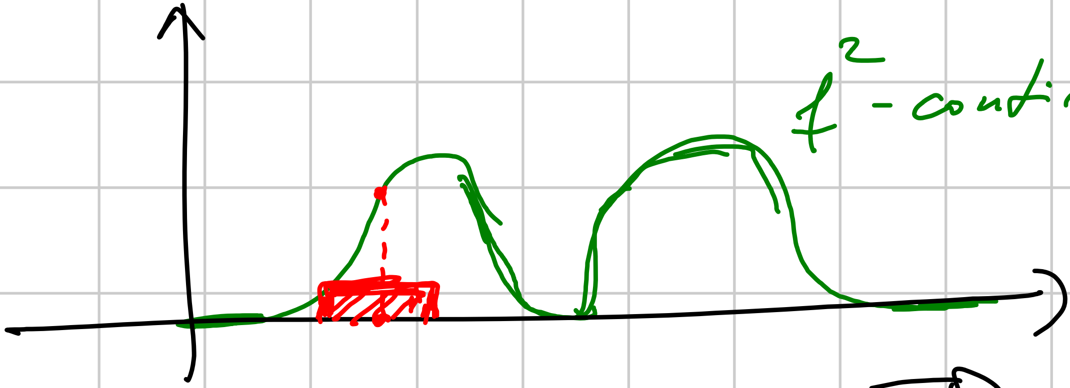
(2) Simmetrico : $\langle f | g \rangle \overset{?}{=} \langle g | f \rangle$

$$\int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt = \int_0^1 g(t)\cdot f(t)\,dt$$

✓

(3) Def. pos. : se $f \neq 0$ si ha $\langle f | f \rangle > 0$:

$$\langle f | f \rangle = \int_0^1 f(t)^2\,dt$$



f^2 - continua non neg

$\Longrightarrow \int > 0$.

—— o ——

Def: se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ considero:

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto {}^t x \cdot A \cdot y$$

$$\underbrace{\underbrace{1\times n \cdot n\times n} \cdot \underbrace{n\times 1}}_{1\times 1}$$

detta applicazione bilineare su $\mathbb{R}^n$ associata ad A.

Prop: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è bilineare $\forall A \in M_{n\times n}$.

Dim: a sx: $\langle \lambda x + \mu z | y \rangle_A =$

$$= {}^t(\lambda x + \mu z) \cdot A \cdot y = (\lambda \cdot {}^t x + \mu \cdot {}^t z) \cdot A \cdot y$$

$= \lambda \, {}^t x \cdot A \cdot y + \mu \, {}^t z \cdot A \cdot y = \lambda \langle x | y \rangle_A + \mu \langle z | y \rangle_A .$

a dx : $\langle x | \lambda y + \mu z \rangle_A = {}^t x \cdot A \cdot (\lambda y + \mu z) =$

$= \lambda \, {}^t x \cdot A \cdot y + \mu \cdot {}^t x \cdot A \cdot z = \lambda \langle x | y \rangle_A + \mu \langle x | z \rangle_A .$

$\blacksquare$

<u>Oss:</u> $\langle e_i \,|\, e_j \rangle_A = {}^t e_i \cdot A \cdot e_j =$

$$
\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{ij}
$$

Prop: Se $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è bilineare allora esiste unica $A \in M_{n \times n}$ t.c. $f = \langle \cdot | \cdot \rangle_A$.

Cioè: "Le applicazioni bilineari su $\mathbb{R}^n$ sono esattamente quelle associate alle matrici $n \times n$".

Dim. Se A esiste certamente si ha che

$$a_{ij} = \langle e_i | e_j \rangle_A \quad \text{vale} \quad f(e_i, e_j)$$

dunque A è unica; per l'esistenza basta porre $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ e provare che funziona, cioè $f = \langle \cdot | \cdot \rangle_A$:

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i , \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)$$

$$\underset{sx}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i f\left(e_i , \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) =$$

$$\underset{dx}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \underbrace{f(e_i , e_j)}_{a_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot y_j$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}\qquad (A \cdot y)_i = {}^t x \cdot A \cdot y \qquad \blacksquare$$

Q : Quali sono i prodotti scalari su $\mathbb{R}^n$?

Q1 : Quali sono le applicazioni bilineari ?

A1 : Quelle che vengono dalle matrici $A \in M_{n \times n}$.

Q2 : Per quali A la corrispondente appl. bil. è simmetrica ?

A2: **Prop:** $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è simmetrico $\iff$ A è simmetrica

"$\langle x|y\rangle_A = \langle y|x\rangle_A \quad \forall x,y$" "${}^tA = A$"

Dim: $\Leftarrow$: Suppongo ${}^tA = A$;

$$\langle y|x\rangle_A = {}^ty \cdot A \cdot x = {}^t({}^ty \cdot A \cdot x) = {}^tx \cdot {}^tA \cdot y$$

è un numero, dunque coincide col trasposto

$$= {}^tx A \cdot y = \langle x|y\rangle_A .$$

$\Rightarrow$: Suppongo $\langle y|x\rangle_A = \langle x|y\rangle_A \quad \forall x,y$

Già visto : $\langle y|x\rangle_A = {}^t x \cdot {}^t A \cdot y$; dunque :

$${}^t x \cdot {}^t A \cdot y = {}^t x \cdot A \cdot y \quad \forall x,y$$

$\Rightarrow \; {}^t x \cdot {}^t A \cdot y - {}^t x \cdot A \cdot y = 0 \; \forall x,y \Rightarrow {}^t x \cdot ({}^t A - A) \cdot y = 0$
$\forall x,y$.

Scegliendo $x = e_i$, $y = e_j$ trovo

$$({}^t A - A)_{ij} = 0 \qquad \forall i,j$$

$\Longrightarrow {}^tA - A = 0 \Longrightarrow {}^tA = A.$ $\blacksquare$

Q3: Per quali A simmetriche la $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è definita positiva?

A3: Richiede molto lavoro (ma c'è).

Es: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\langle x|x \rangle_A = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$

è def. pos. se e solo se $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

<u>Es</u>: Se $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\det(M) \neq 0$

posto $A = {}^tM \cdot M$ si ha che A

è simmetrica e $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos.;

A simm: ${}^tA = {}^t({}^tM \cdot M) = {}^tM \cdot M = A$

$\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ def. pos: $\langle x | x \rangle_A = {}^tx \cdot A \cdot x =$

$= {}^tx \cdot {}^tM \cdot M \cdot x = ({}^tx \cdot {}^tM) \cdot (M \cdot x) =$

$$= {}^t(M\cdot x)\cdot(M\cdot x) = \|M\cdot x\|_{\mathbb{R}^n}$$

è positiva per ogni x t.c. $M\cdot x \neq 0$,
dunque è positiva per ogni $x \neq 0$.