Geometria 2/4/14

Isometrie del piano

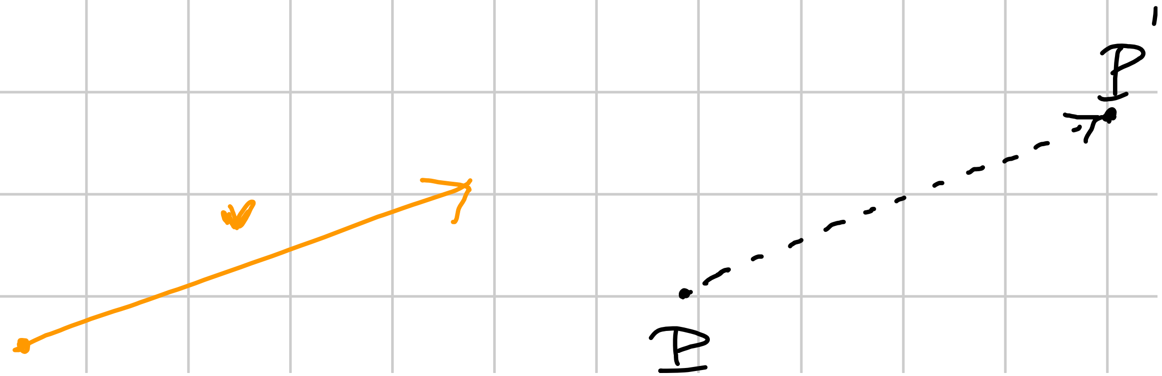
(un po' più del Cap. 11, un po' meno del Cap. 16)

Visto: dato V con $\langle \cdot | \cdot \rangle$, $f: V \to V$ lineare è **isometria** se $\langle f(v) | f(w) \rangle = \langle v | w \rangle \quad \forall v, w$, o equivalentemente $d(f(v), f(w)) = d(v, w)$.

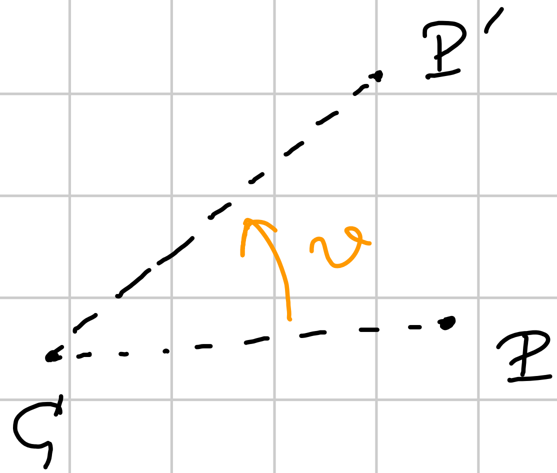
E studiamo: $f : V \to V$ isometria se
$$d(f(v), f(w)) = d(v, w) \quad \forall v, w$$
(non chiedo che sia lineare).

Per oggi: $V = \mathbb{R}^2$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$. Esempi:

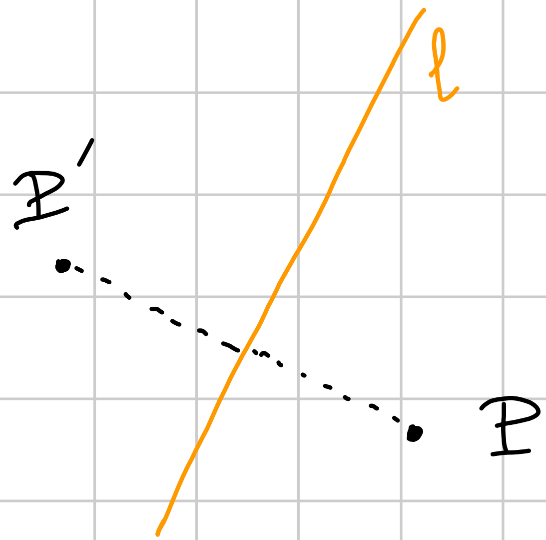
- $id_{\mathbb{R}^2}$
- Traslazioni:



• rotazioni :

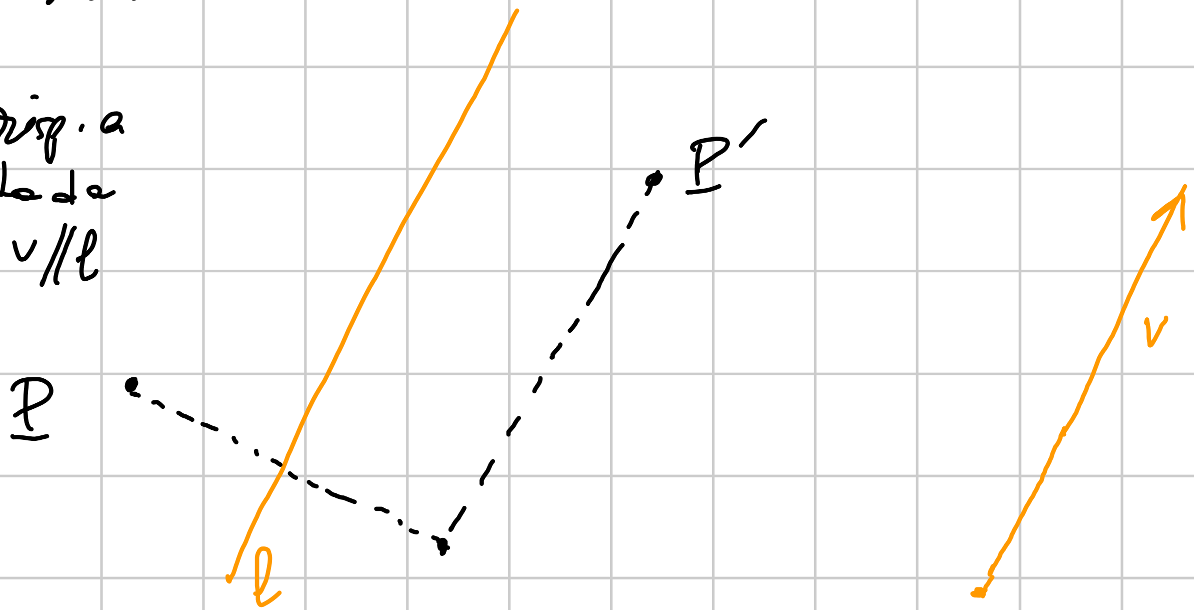


• riflessioni :



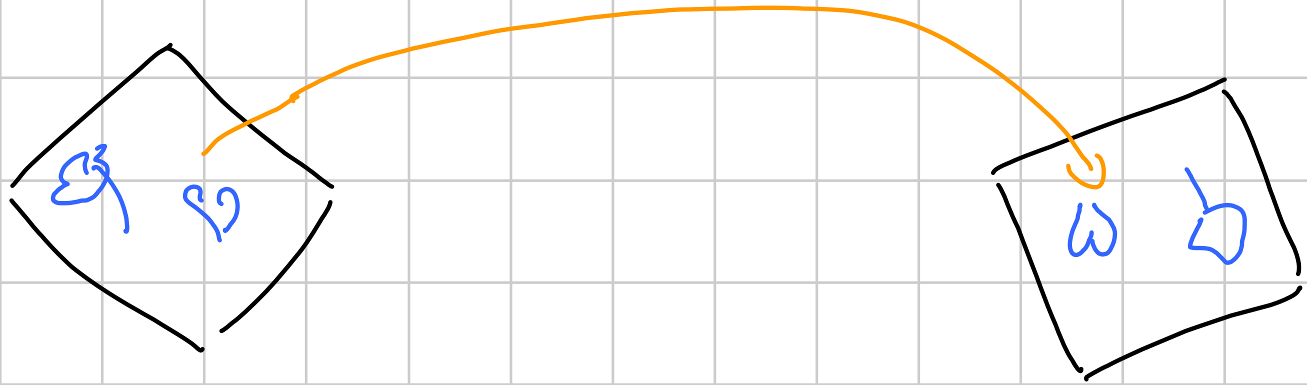
• glissoriflessioni

= riflessione risp. a retta ℓ seguita da traslaz. di vettore $v \parallel \ell$



Oss: una composizione di isometrie è isometria.
(Dunque le glissoriflessioni sono isometrie.)

Teo: le isometrie del piano sono precisamente quelle elencate (id, traslaz., rotaz., rifl., glissorifl.)



Cioè: se nel piano vedo due oggetti "uguali" allora sono legati da una traslaz o rotaz o...

<u>Def</u>: chiamo trasformazione <u>affine</u> di $\mathbb{R}^2$ una del tipo

$$x \longmapsto M \cdot x + v$$

con $M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $v \in \mathbb{R}^2$.

Cioè affine = lineare + traslazione.

<u>OSS</u>: (1) la composizione di trasf affini è affine:

$$M_2\cdot(M_1\cdot x+v_1)+v_2 = \underbrace{(M_2\cdot M_1)}_{M}\cdot x + \underbrace{(M_2\cdot v_1+v_2)}_{v}$$

(2) le trasf elencate (traslaz, rotaz, riflessioni, dilatazioni) sono affini:

- traslaz ✓
- rotaz.

rotaz angolo ϑ intorno a c :

$$x \longmapsto R_\vartheta \cdot (x-c) + c = \underbrace{R_\vartheta}_{\text{matr.}} \cdot x + \underbrace{c - R_\vartheta \cdot c}_{\text{vett.}}$$

• rifl.

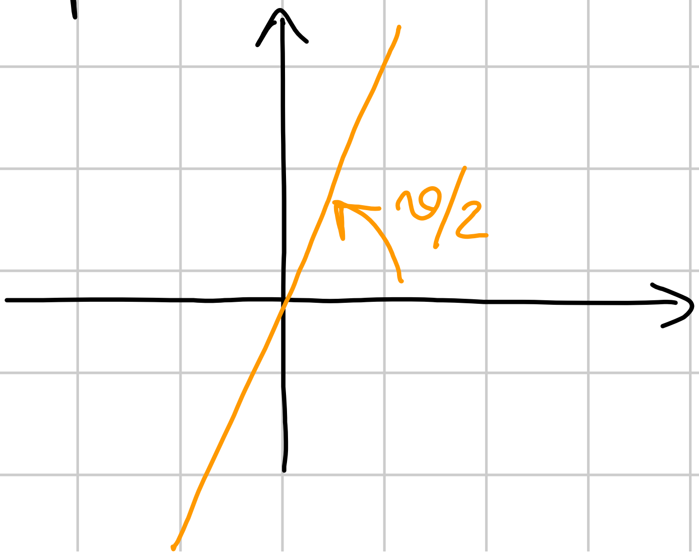
$$x \longmapsto \underbrace{\mathrm{rifl}_{\ell'}}_{\text{matrice (trasposto)}} \cdot (x-c) + c$$

$\Longrightarrow$ come sopra

Matrice di una riflessione: dico che

$$S_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

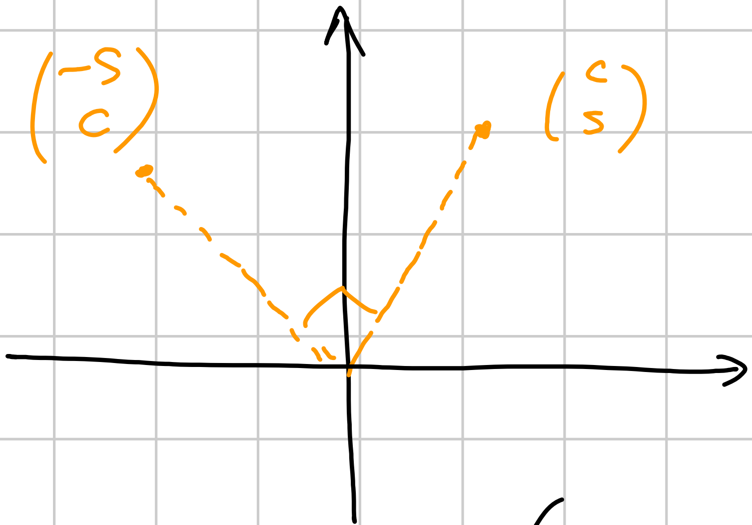
è la matrice della riflessione rispetto alla retta di inclinazione $\vartheta/2$ —



Infatti posto

$c = \cos\vartheta/2$

$s = \sin\vartheta/2$



volevo vedere che

$$S_v \cdot \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

$$S_v \cdot \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -c \end{pmatrix}.$$

Infatti $S_v = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ \sin v & -\cos v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2-s^2 & 2sc \\ 2sc & s^2-c^2 \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} c^2-s^2 & 2sc \\ 2sc & s^2-c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^3-cs^2+2cs^2 \\ 2sc^2+s^3-sc^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^3+cs^2 \\ s^3+sc^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c^2-s^2 & 2sc \\ 2sc & s^2-c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sc^2+s^3+2sc^2 \\ -2s^2c+s^2c-c^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^3+sc^2 \\ -s^2c-c^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -c \end{pmatrix}.$$

<u>OK</u>

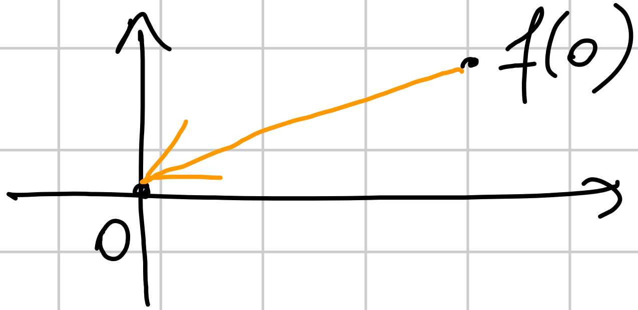
- glissorifl. affini: traslaz ∘ rifl.

——— ∘ ———

<u>Prop</u>: tutte le isometrie di $\mathbb{R}^2$ sono affini.

Dim: Sia f una isometria.

<u>Passo 1</u>: scelgo τ la traslaz. di vettore $-f(0)$:

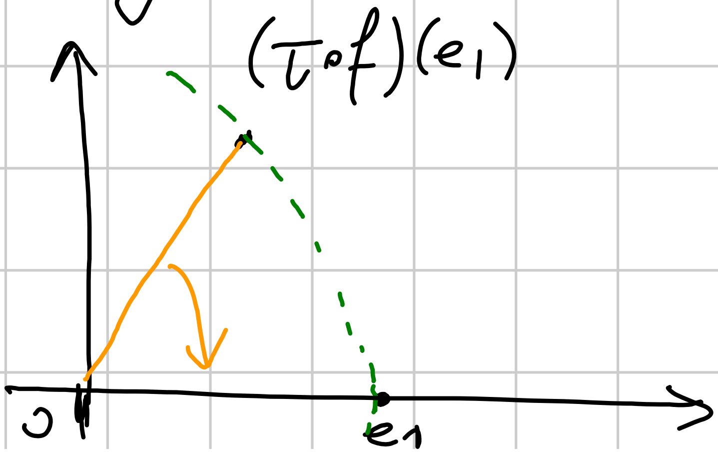


allora ho che

$\tau \circ f$ manda 0 in 0.

(Att.: τ può essere id)

Passo 2: scelgo ρ la rotaz. intorno a 0 di angolo



$\Longrightarrow$ $\rho \circ \tau \circ f$

manda 0 in 0

e e_1 in e_1

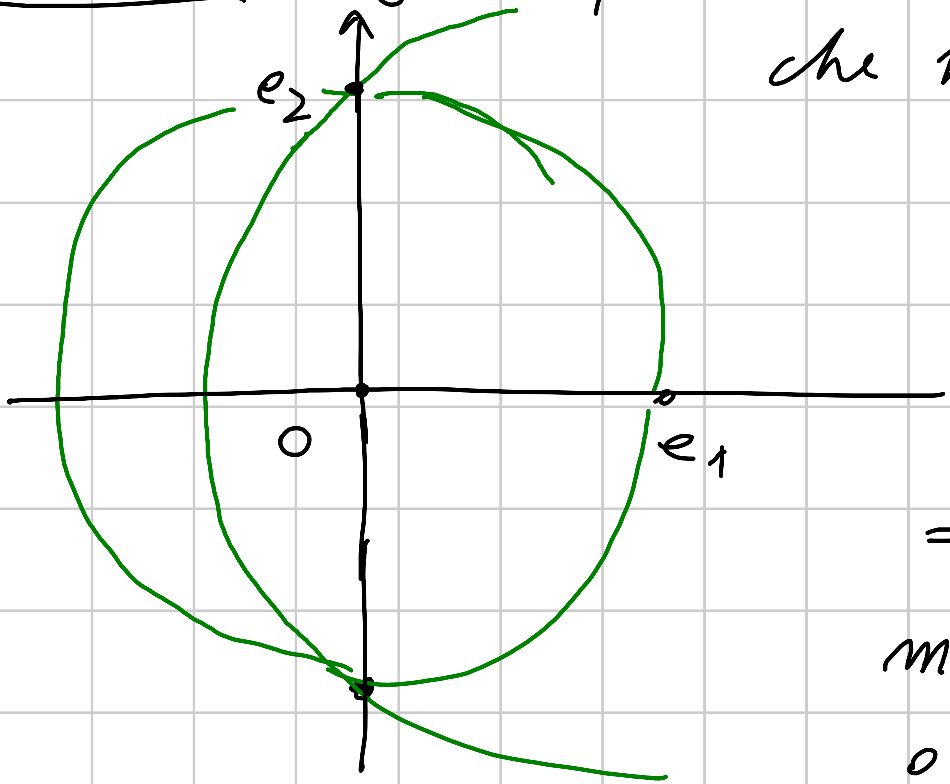
(ed è una isometria)

(att: ρ può essere id)

Passo 3: $\rho \circ \tau \circ f$ manda e_2 in un punto che ha distanza

1 da O e

$\sqrt{2}$ da e_2

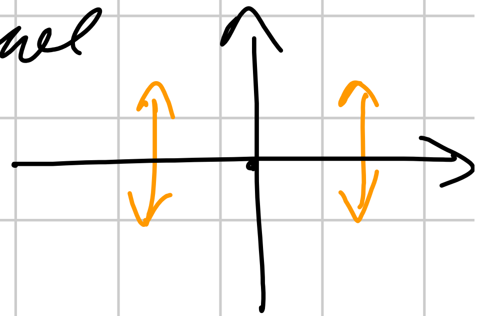


$\Longrightarrow \rho \circ \tau \circ f$

manda e_2 o in e_2

o in $-e_2$

Scelgo nel primo caso $\sigma = id$ e nel secondo $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ = rifl



$\Rightarrow \sigma \circ \rho \circ \tau \circ f$ è una isometria e manda:
O in O
e_1 in e_1
e_2 in e_2

Ora una isometria che fissa tre punti non allineati è l'identità (tre circonf con centri non allineati hanno un solo punto in comune) - Anche in formule:

Se x viene trasformato in y ho:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 \\ (x_1-1)^2 + x_2^2 = (y_1-1)^2 + y_2^2 \\ x_1^2 + (x_2-1)^2 = y_1^2 + (y_2-1)^2 \end{cases} \Rightarrow y = x$$

$$\Rightarrow \sigma \circ \rho \circ \tau \circ f = id$$

$$\Rightarrow f = \tau^{-1} \circ \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$$

composiz. di trasf. affini $\Longrightarrow$ affine. $\boxtimes$

<u>Dimo</u> (Teo): Appena visto: ogni isom. f è

$$f = \underbrace{\tau^{-1}}_{\substack{\text{id o} \\ \text{traslaz}}} \circ \underbrace{\underbrace{\rho^{-1}}_{\substack{\text{id o} \\ \text{rotaz}}} \circ \underbrace{\sigma^{-1}}_{\substack{= \sigma \\ \text{id o rifl} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}}}_{}$$

id $\circ$ rifl $\circ$ rotaz $\circ$

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ rifl.

id $\circ$ rifl $\circ$ rotaz oppure

- traslaz $\circ$ rotaz
- traslaz $\circ$ riflessione

Per concludere mostro:

Prop: (1) traslaz $\circ$ rotaz $=$ rotaz

(2) traslaz $\circ$ rifl $=$ rifl $\circ$ glissorifl

Dim: (1) $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Dico che ha un unico punto fisso $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} (c-1)x_0 - s y_0 = -a \\ s y_0 + (c-1) y_0 = -b \end{cases}$$

$$\det\begin{pmatrix} c-1 & -s \\ s & c-1 \end{pmatrix} = c^2-2c+1+s^2 = 2(1-c)$$

è $\neq 0$ altrimenti viene l'identità.

Ok: unico pto fisso: basta provare che g è la rotazione di angolo ϑ intorno a $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$:

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Questa uguaglianza equivale a $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ✓

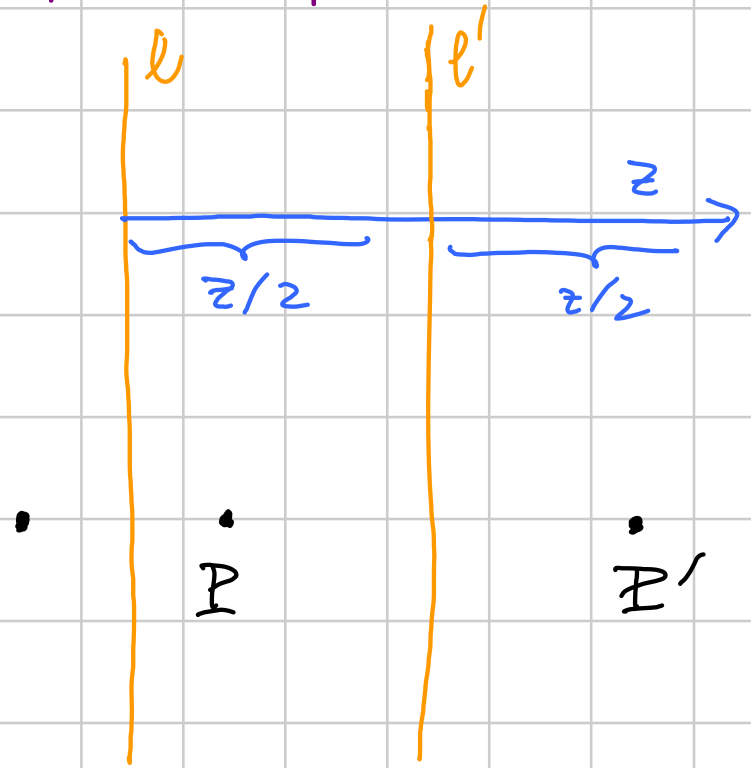
$$(2)\ \begin{pmatrix} \text{traslaz} \\ \text{di vett } v \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \text{rifl.} \\ \text{retta } \ell \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{traslaz. di} \\ \text{vett. } w \parallel \ell \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} \text{traslaz} \\ \text{di vett} \\ z \perp \ell \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \text{rifl.} \\ \text{retta } \ell \end{pmatrix}}$$

(∗) provo che questo è la rifl. in $\ell' \parallel \ell$

dunque viene rifl. per $w=0$
oppure glissoriflessione per $w \neq 0$.

Dimostro ⊛

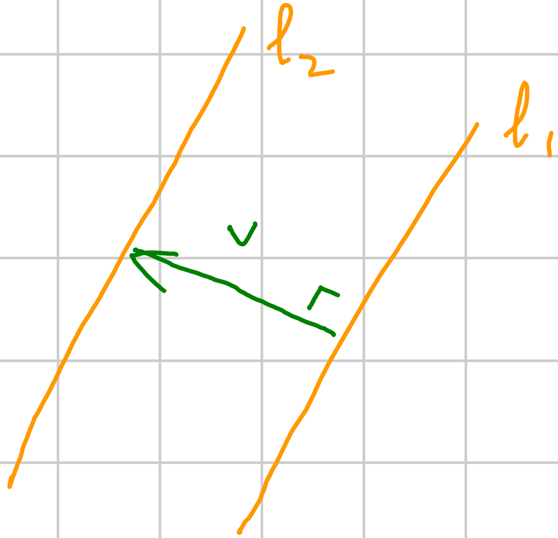


$\blacksquare$

Cor: ogni isometria del piano è composizione di al più tre riflessioni.

Dim: le isometrie sono:

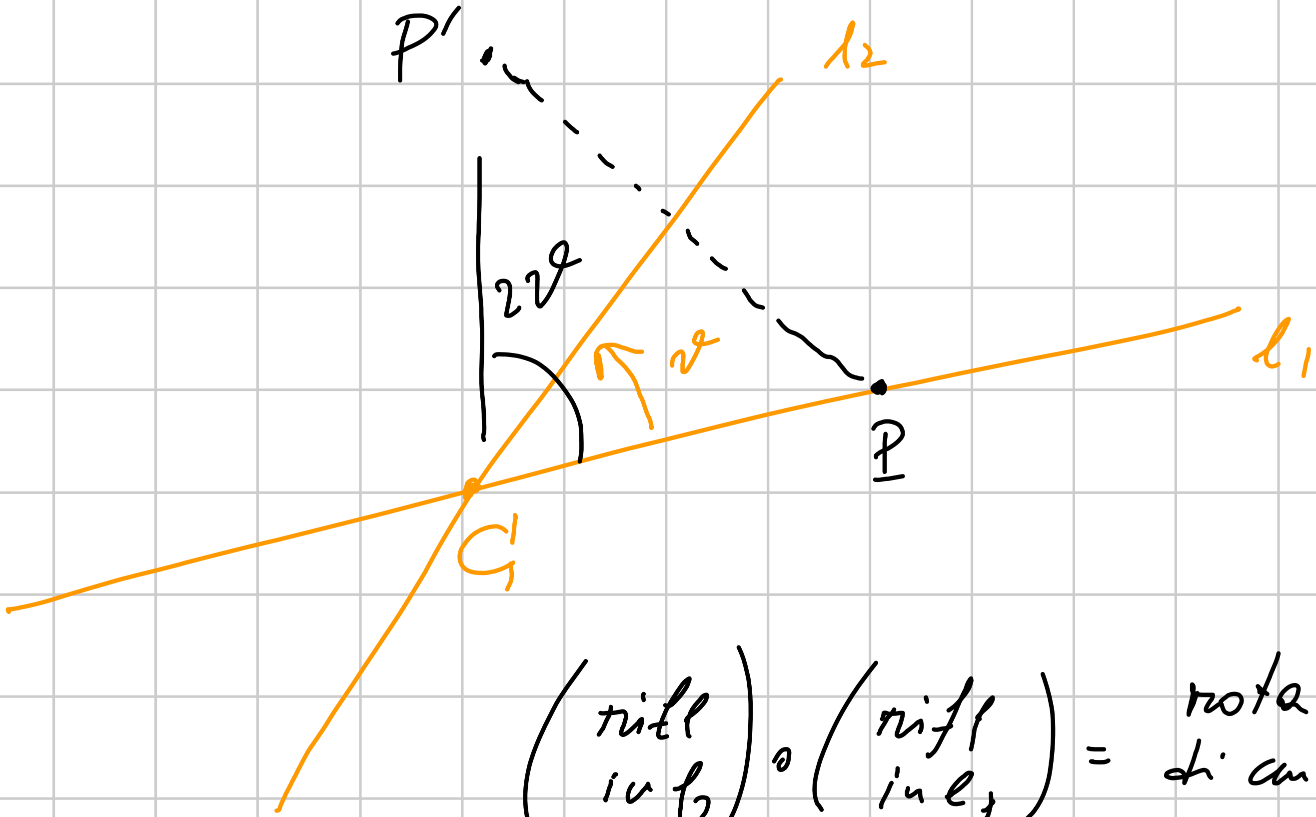
- id : 0 riflessioni
- traslaz: 2 riflessioni:



$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \text{rifl} \\ \text{in } \ell_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \text{rifl} \\ \text{in } \ell_1 \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} \text{traslaz} \\ \text{di } 2v \end{pmatrix}$$

- rotaz : 2 rifl :



$$\begin{pmatrix}\text{rifl} \\ \text{in } l_2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}\text{rifl} \\ \text{in } l_1\end{pmatrix} = \begin{matrix}\text{rotaz} \\ \text{di centro } C \\ \text{e angolo } 2\vartheta.\end{matrix}$$

$\boxtimes$

Coniche e quadriche

Modelli metrici delle coniche –
Parabole, Ellissi, Iperbole –
Circonferenza

Circonf di centro C, e raggio r

= luogo di punti del piano aventi
distanza r da C

Scegliendo a meno di isometrie (traslaz)

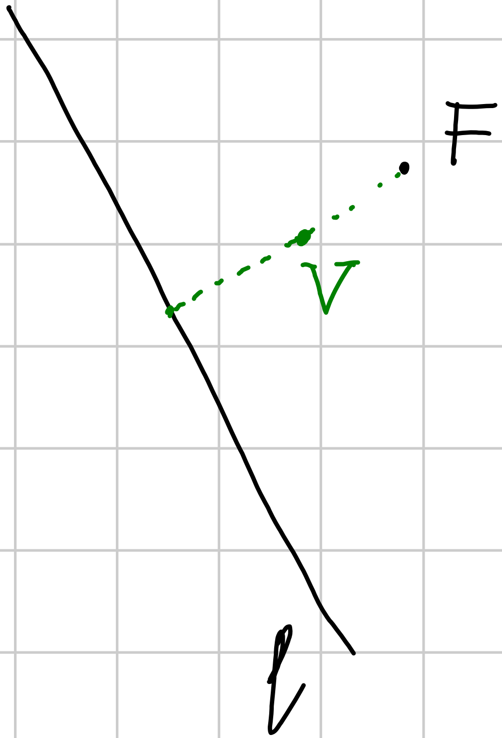
"se necessario applicando una"

l'equazione è $x^2+y^2=r^2$.

<u>Parabola</u>: F punto, l retta, $F \notin l$

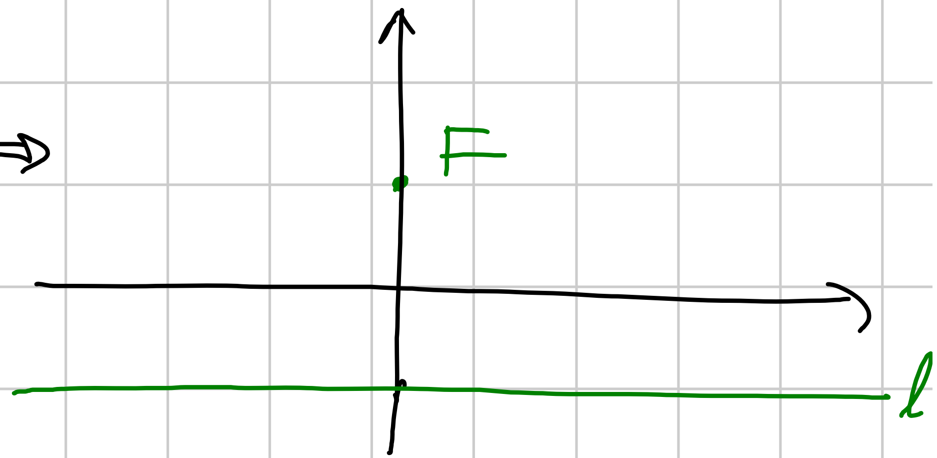
parabola di fuoco F e direttrice l è il

luogo dei punti equidistanti da F e da ℓ.
Equazione canonica a meno di isometrie:



- traslo V in O
- ruoto in modo che ℓ diventi orizzontale

$\Longrightarrow$



$\Rightarrow$ dopo isometrie $\quad F = (0, h)$

$\ell : \; y = -h \qquad (h > 0)$

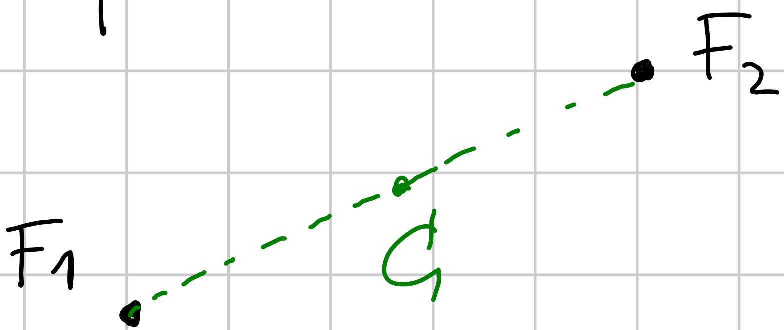
Parabola: $\sqrt{x^2 + (y-h)^2} = |y+h|$

$$x^2 + \cancel{y^2} - 2hy + \cancel{h^2} = \cancel{y^2} + 2hy + \cancel{h^2}$$

$$y = \frac{1}{4h} x^2 \;, \quad \boxed{y = a \cdot x^2 \quad a > 0}$$

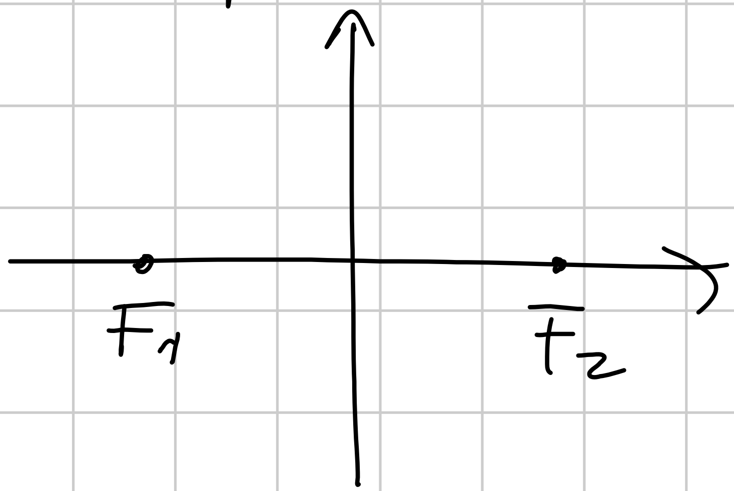
Ellisse / iperbole: luogo dei punti per cui è costante la somma / differenza da due punti distinti F_1 e F_2 (fuochi).

Equazione canonica a meno di isometrie:



- traslo C in O
- ruoto in modo che F_1F_2 sia orizzontale

⇒ dopo isometria

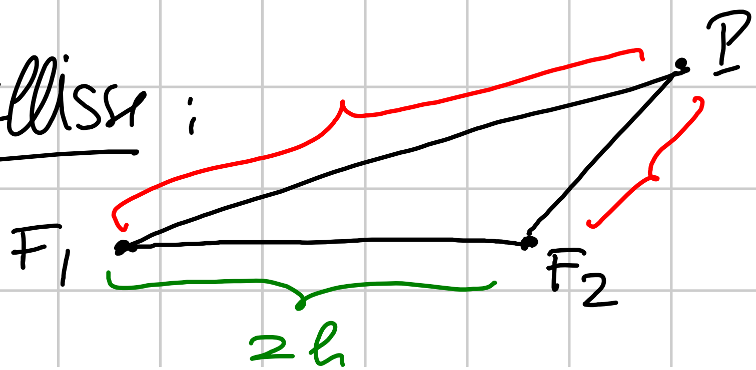


$F_1 = (-h, 0)$
$F_2 = (h, 0)$

Ellisse/iperbole

$$\sqrt{(x+h)^2+y^2} \pm \sqrt{(x-h)^2+y^2} = 2k$$

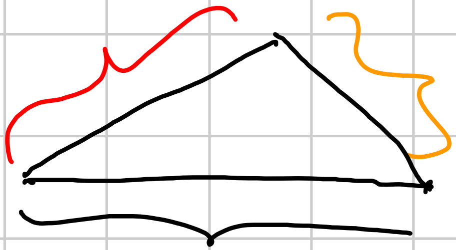
Ellisse:



$\} + \} = 2k$

$k > h$

Iperbole



$2h$

$\} - \} = 2k \Rightarrow k < h$

$$\sqrt{(x+h)^2+y^2} \pm \sqrt{(x-h)^2+y^2} = 2k$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+h)^2+y^2} = 2k \pm \sqrt{(x-h)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + 2hx + \cancel{h^2} + \cancel{y^2} = 4k^2 \pm 4k\sqrt{(x-h)^2+y^2} + \cancel{x^2} - 2hx + \cancel{h^2} + \cancel{y^2}$$

$$\Rightarrow hx - k^2 = \pm k\sqrt{(x-h)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow h^2x^2 \cancel{- 2hk^2x} + k^4 = k^2x^2 \cancel{- 2hk^2x} + k^2h^2 + k^2y^2$$

$$\Rightarrow (k^2-h^2)x^2 + k^2y^2 = k^2(k^2-h^2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2-h^2} = 1$$

$\Rightarrow$ equazioni canoniche

Ellisse:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Iperbole:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

(Fatto: durante i passaggi non ho aggiunto soluzioni —

Imbroglio: per l'iperbole l'equaz. iniziale è

$$\left|\sqrt{(x+h)^2+y^2} - \sqrt{(x-h)^2+y^2}\right| = 2k\,.\Big)$$