UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 26/1/15 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 22 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, determinare $p_A(t)$ e provare che A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

2. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ ha autovalori distinti,
si può concludere che A^2 ha autovalori distinti e/o che è diagonalizzabile?

3. Ortonormalizzare la base $\big(e_1 - e_2 + 3e_3,\ e_1 + 2e_2 - e_3,\ 4e_1 - 3e_2 + \sqrt{2}e_3\big)$ di $\mathbb{R}^3$.

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 3 & t^2+3 & 0 \\ 7t - t^2 & \sqrt{\pi} & 2 - t^2 \\ 0 & t^2 + 3t & t^{193} \end{pmatrix}$
ammette una base ortonormale di autovettori.

5. Determinare il tipo affine della quadrica
$2x^2 + 9y^2 + 10z^2 - 6xy + 6xz - 10yz + 6x - 8y + 12z + 4 = 0.$

6. Vedendo $\mathbb{R}^2$ come la parte al finito di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, determinare i punti all'infinito dell'insieme
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x + y - \sin(x)) \cdot (x^2 - 4y^2 - 3) = 0\}$.

7. Calcolare $\int_\alpha (xy^2\,\mathrm{d}x - 2x^2y\,\mathrm{d}y)$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ t + t^3 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 26/1/15 — Esercizî

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$, dotato di un prodotto scalare. Siano $v_1, v_2 \in V$ vettori linearmente indipendenti, sia p_j la proiezione ortogonale di V su $v_j^{\perp}$, e sia $f : V \to V$ data da $f = p_1 + p_2$.

(A) (4 punti) Provare che se $n \geqslant 3$ allora f ammette l'autovalore 2.

(B) (4 punti) Per $n = 2$ esprimere gli autovalori di f in funzione dell'angolo ϑ formato da v_1 e v_2.

(C) (4 punti) Dimostrare che f è sempre diagonalizzabile.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(u) = \begin{pmatrix} u^2 + \sin(u) \\ u^2 - 2u \\ u^3 + 5u \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che α è semplice e regolare.

(B) (3 punti) Determinare il riferimento di Frénet per α nel punto $u = 0$.

(C) (4 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $u = 0$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta xyz \left(\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{\mathrm{d}z}{z} \right)$ dove β è la restrizione di α a $[\pi, 2\pi]$

Risposte

5. ♢

1. $t^3 - 7t^2 - 4t + 4$; ha gli autovalori reali distinti -1 e $4 \pm 2\sqrt{3}$

2. È diagonalizzabile perché A lo è, e una base che diagonalizza A lo fa anche per A^2. Ma gli autovalori di A^2 sono i quadrati di quelli di A, dunque possono non essere distinti —ad esempio, per $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{5\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

4. $t = \frac{1}{2}$

5. Ellissoide

6. $\{[1 : -1 : 0],\ [2 : 1 : 0],\ [2 : -1 : 0]\}$

7. $-\frac{23}{20}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) Posto $U = \text{Span}(v_1, v_2)$ e $W = U^\perp$ abbiamo che W che ha dimensione $n-2 \geqslant 1$, e su W sia p_1 sia p_2 sono l'identità, dunque f è 2 volte l'identità

(B) Possiamo supporre che v_1 e v_2 siano unitari, poiché sostituendo v_j con $\frac{v_j}{\|v_j\|}$ non cambiano né p_j né l'angolo formato da v_1 e v_2. Scegliamo allora una base ortonormale $\mathcal{B} = (v_1, w_2)$ di V. Rispetto ad essa avremo $[v_1] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $[v_2]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$, dove $c = \cos(\vartheta)$ e $s = \sin(\vartheta)$. Qui s è definito a meno di un'ambiguità di segno, che corrisponde al fatto che ci sono due scelte possibili per w_2. Avremo ora naturalmente $[p_1]_\mathcal{B}^\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mentre

$$[p_2]_\mathcal{B}^\mathcal{B} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (cx + sy) \cdot \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 & -cs \\ -cs & c^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ne segue che

$$[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B} = \begin{pmatrix} s^2 & -cs \\ -cs & 1 + c^2 \end{pmatrix}$$

che ha traccia 2 e determinante s^2, dunque f ha polinomio caratteristico $t^2 - 2t + s^2$ e autovalori $1 \pm c$. Notiamo che è logico che essi dipendano solo da $|c|$ e non da c, perché sostituendo v_2 con $-v_2$ la f non cambia mentre c cambia segno

(C) I sottospazi U e W della soluzione del punto (A) sono mandati in sé stessi da f, e su W la f è due volte l'identità. Inoltre per il punto (B) su U la f è l'identità quando v_1 e v_2 sono ortogonali tra loro, e ha autovalori distinti quando non lo sono. Si conclude in ogni caso che f è diagonalizzabile

2.

(A) La terza componente ha derivata sempre positiva

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $n = \frac{1}{\sqrt{1770}} \begin{pmatrix} 31 \\ 28 \\ 5 \end{pmatrix}$, $b = \frac{1}{\sqrt{59}} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \frac{\sqrt{59}}{15\sqrt{30}}$, $\tau = \frac{23}{118}$

(D) $\pi^4(127\pi^3 - 126\pi^2 + 155\pi - 150)$