UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 19/7/14 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 3+2\sqrt{3} & 2 \\ 2 & 3-2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ e una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

2. Calcolare la curvatura nel punto $t=0$ della curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} (3t+1)\ln(1-t) \\ (1-2t)\cos(t) \end{pmatrix}$.

3. Calcolare $\int_\alpha e^{2x}$ con $\alpha: \ [0,\ln(2)] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ 3e^t \end{pmatrix}$.

4. Per quali $t \in \mathbb{R}$ il punto $[-t-1 : 3t+1 : 1-t]$ coincide con $[2 : -5 : 1]$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$?

5. Determinare il tipo affine della quadrica $3x^2 + 8y^2 + 2z^2 - 4yz + 2x - 4y + 2 = 0$.

6. Calcolare $\int_\alpha \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ con $\alpha: \ [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ t(1-t) \end{pmatrix}$.

7. Per quali $a \in \mathbb{R}$ la $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 2\sqrt{3} \\ -2 & -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ è coniugata a $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tramite una ortogonale?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 19/7/14 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ e, al variare di k nei reali, $w_k = \begin{pmatrix} k+4 \\ 3k+7 \\ k+6 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Trovare il valore k_0 di k per cui w_k è ortogonale a v.

(B) (3 punti) Esibire la matrice M della proiezione ortogonale su $w_{k_0}^{\perp}$, dove k_0 è il valore di k trovato nel punto (A), verificando che $M \cdot M = M$.

(C) (3 punti) Esibire la matrice N della proiezione ortogonale su $v^{\perp}$.

(D) (1 punto) Provare che $P = 14M + 26N$ ammette sempre una base ortonormale di autovettori.

(E) (3 punti) Trovare gli autovalori di P e una base ortonormale di suoi autovettori.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare $A_k = \begin{pmatrix} 9-2k & 16-3k & 2k-16 \\ 2k-8 & 3k-15 & 8 \\ k-4 & k-7 & k+3 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che $\det(A_k) = -2k^3 + 19k^2 - 52k + 35$.

(B) (2 punti) Sapendo che $p_{A_k}(-1) = 2k^3 - 18k^2 + 36k$ determinare $p_{A_k}(t)$.

(C) (1 punti) Sapendo che A_k ha gli autovalori $\lambda_1 = 5 - k$ e $\lambda_2 = k - 1$ trovare il terzo λ_3.

(D) (2 punti) Al variare di k trovare le molteplicità algebriche dei λ_j.

(E) (4 punti) Al variare di k trovare le molteplicità geometriche dei λ_j, deducendone i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile.

Risposte

5. ♡

1. $\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -1;\ v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $-\frac{13}{5\sqrt{5}}$

3. $\frac{1}{27}\left(37\sqrt{37} - 10\sqrt{10}\right)$

4. $t = 3$

5. Insieme vuoto

6. π

7. $a = \pm 5$

---

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $k = -3$

(B) $M = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & 2 & -3 \\ 2 & 10 & 6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; la M è simmetrica e $M \cdot M = M$

(C) $N = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 25 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & -12 & 17 \end{pmatrix}$

(D) È simmetrica

(E) $\lambda_1 = 14,\ \lambda_2 = 26,\ \lambda_3 = 40$;

$$v_1 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ v_2 = \frac{w_{k_0}}{\|w_{k_0}\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ v_3 = \frac{v \wedge w_{k_0}}{\|v \wedge w_{k_0}\|} = \frac{1}{\sqrt{91}}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.

(A) Sostituire la seconda riga con sé stessa meno 2 volte la terza, quindi raccogliere $k-1$ dalla seconda riga, e infine sostituire la terza colonna con sé stessa più 2 volte la seconda; si trova allora direttamente $(k-1)(-2k^2+17k-35)$ che coincide con quanto voluto

(B) $p_{A_k}(t) = t^3 + (3-2k)t^2 - (k^2-14k+33)t - (-2k^3+19k^2-52k+35)$

(C) $\lambda_3 = 2k - 7$

(D) Per k diverso da 3, da 4 e da 6 ognuno dei λ_j ha m.a. 1;
per $k=3$ si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ con m.a. 2 e $\lambda_3 = -1$ con m.a. 1;
per $k=4$ si ha $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ con m.a. 2 e $\lambda_2 = 3$ con m.a. 1;
per $k=6$ si ha $\lambda_1 = -1$ con m.a. 1 e $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$ con m.a. 2

(E) Per k diverso da 3, da 4 e da 6 ognuno dei λ_j ha m.g. 1 dunque A_k è diagonalizzabile;
per $k=3$ si ha m.g.$(2) = 1$ e m.g.$(-1) = 1$ dunque A_k non è diagonalizzabile;
per $k=4$ si ha m.g.$(1) = 2$ e m.g.$(3) = 1$ dunque A_k è diagonalizzabile;
per $k=6$ si ha m.g.$(-1) = 1$ e m.g.$(5) = 1$ dunque A_k non è diagonalizzabile