UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 19/7/14 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ______

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{7} & 3 \\ 3 & 1+\sqrt{7} \end{pmatrix}$ e una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

2. Calcolare la curvatura nel punto $t = 0$ della curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} (2t+1)\ln(1-3t) \\ (2-t)\cos(t) \end{pmatrix}$.

3. Calcolare $\int_\alpha \sin(2x)$ con $\alpha : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

4. Per quali $t \in \mathbb{R}$ il punto $[2(1-t) : 4-t : t-2]$ coincide con $[5 : 1 : -2]$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$?

5. Determinare il tipo affine della quadrica $3x^2 + 8y^2 + 2z^2 - 4yz + 2x - 2z = 0$.

6. Calcolare $\int_\alpha \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ t(t-1) \end{pmatrix}$.

7. Per quali $a \in \mathbb{R}$ la $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & 2\sqrt{2} \\ -5 & -2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ è coniugata a $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tramite una ortogonale?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 19/7/14 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ e, al variare di k nei reali, $w_k = \begin{pmatrix} 5-2k \\ k-1 \\ k-2 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Trovare il valore k_0 di k per cui w_k è ortogonale a v.

(B) (3 punti) Esibire la matrice M della proiezione ortogonale su $w_{k_0}^{\perp}$, dove k_0 è il valore di k trovato nel punto (A), verificando che $M \cdot M = M$.

(C) (3 punti) Esibire la matrice N della proiezione ortogonale su $v^{\perp}$.

(D) (1 punto) Provare che $P = 6M + 29N$ ammette sempre una base ortonormale di autovettori.

(E) (3 punti) Trovare gli autovalori di P e una base ortonormale di suoi autovettori.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 2k-5 & 10-4k \\ 2k+8 & k+15 & 2k-20 \\ k+4 & k+2 & 1 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che $\det(A_k) = -2k^3 + 15k^2 + 72k + 55$.

(B) (2 punti) Sapendo che $p_{A_k}(1) = 2k^3 - 16k^2 - 40k$ determinare $p_{A_k}(t)$.

(C) (1 punti) Sapendo che A_k ha gli autovalori $\lambda_1 = 2k+5$ e $\lambda_2 = k+1$ trovare il terzo λ_3.

(D) (2 punti) Al variare di k trovare le molteplicità algebriche dei λ_j.

(E) (4 punti) Al variare di k trovare le molteplicità geometriche dei λ_j, deducendone i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -3;\ v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{7}+4 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{7}-4 \end{pmatrix}$

2. $-\frac{3}{2\sqrt{10}}$

3. $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

4. $t = 6$

5. Ellissoide

6. $-\pi$

7. $a = \pm 7$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) $k = 3$

(B) $M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; la M è simmetrica e $M \cdot M = M$

(C) $N = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 25 & -6 & 8 \\ -6 & 20 & 12 \\ 8 & 12 & 13 \end{pmatrix}$

(D) È simmetrica

(E) $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 29,\ \lambda_3 = 35$;
$v_1 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ v_2 = \frac{w_{k_0}}{\|w_{k_0}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \frac{v \wedge w_{k_0}}{\|v \wedge w_{k_0}\|} = \frac{1}{\sqrt{174}}\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

2.

(A) Sostituire la seconda riga con sé stessa meno 2 volte la terza, quindi raccogliere $11 - k$ dalla seconda riga, e infine sostituire la terza colonna con sé stessa più 2 volte la seconda; si trova allora direttamente $(11-k)(k+1)(2k+5)$ che coincide con quanto voluto

(B) $p_{A_k}(t) = t^3 - (2k+17)t^2 - (k^2 - 34k - 71)t - (-2k^3 + 15k^2 + 72k + 55)$

(C) $\lambda_3 = 11 - k$

(D) Per k diverso da -4, da 2 e da 5 ognuno dei λ_j ha m.a. 1;
per $k = -4$ si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ con m.a. 2 e $\lambda_3 = 15$ con m.a. 1;
per $k = 2$ si ha $\lambda_1 = \lambda_3 = 9$ con m.a. 2 e $\lambda_2 = 3$ con m.a. 1;
per $k = 5$ si ha $\lambda_1 = 15$ con m.a. 1 e $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ con m.a. 2

(E) Per k diverso da -4, da 2 e da 5 ognuno dei λ_j ha m.g. 1 dunque A_k è diagonalizzabile;
per $k = -4$ si ha m.g.$(-3) = 2$ e m.g.$(15) = 1$ dunque A_k è diagonalizzabile;
per $k = 2$ si ha m.g.$(9) = 1$ e m.g.$(3) = 1$ dunque A_k non è diagonalizzabile;
per $k = 5$ si ha m.g.$(15) = 1$ e m.g.$(6) = 1$ dunque A_k non è diagonalizzabile