UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 8/1/15 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Trovare gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} 2+i & -2i \\ 2 & -1-2i \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizza.

2. Calcolare $\int_\alpha y^3$ con $\alpha : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 3t \end{pmatrix}$.

3. Calcolare $\int_\alpha \frac{x\,\mathrm{d}y-(y-1)\,\mathrm{d}x}{x^2+(y-1)^2}$ con $\alpha : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ -2\sin(t) \end{pmatrix}$.

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ per $[1:0:-1:1]$ e $[0:1:2:-1]$ incontra la retta passante per $[3:-3:0:1]$ e $[1:t:-1:3]$.

5. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ l'equazione $(t+1)x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 2z^2 + 2(2-t)xz + 2yz + 6z = 0$ definisce un paraboloide iperbolico.

6. Calcolare $\int_{\partial R} \frac{1}{2}\,(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$ dove $R = [-2,4] \times [3,6]$.

7. Per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste M matrice ortogonale tale che $M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Al variare di $z = x + iy$ in $\mathbb{C}$ considerare le matrici

$$M = \begin{pmatrix} z+1 & \overline{z}+2i \\ 2-i & 1+3i \end{pmatrix}, \quad H = M + M^*, \quad A = M - M^*.$$

(A) (1 punto) Esplicitare H e A in funzione di x e y.

(B) (2 punti) Provare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ la H ha autovalori reali ed esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di H.

(C) (3 punti) Al variare di $z \in \mathbb{C}$ determinare i segni degli autovalori di H.

(D) (2 punti) Provare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ la A ha autovalori immaginari puri ed esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di H.

(E) (2 punti) Determinare i valori di z per i quali la A ha autovalori opposti tra loro.

(F) (2 punti) Determinare gli autovalori di A per $z = -10 - 3i$

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 2k+7 & k & 3 \\ k^2-2k-7 & k^2-k & k^2-3k-4 \\ 1 & 1 & 3k+2 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\det(A)$ vale $3k^4 + 22k^3 + 10k^2 + 22k + 7$.

(B) (2 punti) Sapendo che $p_A(1) = -3k^4 - 18k^3$ determinare $p_A(t)$.

(C) (2 punti) Sapendo che A ha gli autovalori $\lambda_1 = k + 7$ e $\lambda_2 = 3k + 1$, trovare il terzo λ_3.

(D) (3 punti) Al variare di k determinare le molteplicità algebriche degli autovalori di A.

(E) (3 punti) Al variare di k determinare le molteplicità geometriche degli autovalori di A, deducendone i valori di k per cui A è diagonalizzabile.

Risposte

5. ♡

1. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -i;\ v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $\frac{2}{27}\left(17\sqrt{17}-1\right)$

3. -2π

4. $t = 18$

5. $t = 0$ e $t = 8$

6. 18

7. $\lambda = \pm\sqrt{26}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $H = \begin{pmatrix} 2x+2 & x+2-i(y-3) \\ x+2+i(y-3) & 2 \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 2iy & x-2+i(1-y) \\ 2-x+i(1-y) & 6i \end{pmatrix}$

(B) H è hermitiana

(C) Uno positivo e uno nullo per $z = 3i$, discordi altrimenti

(D) A è antihermitiana

(E) $z = x - 3i$

(F) $\pm 14i$

2.

(A) Sottraendo la prima riga dalla seconda e poi la seconda colonna dalla prima ci si riconduce a $(k+7) \cdot \det \begin{pmatrix} k^2 & k^2-3k-1 \\ 1 & 3k-2 \end{pmatrix}$ e i conti sono facili

(B) $p_A(t) = t^3 - t^2(k^2+4k+9) + t(4k^3+11k^2+26k+15) - 3k^4 - 22k^3 - 10k^2 - 22k - 7$

(C) $\lambda_3 = k^2 + 1$

(D) Per $k \neq -2, 0, 3$ autovalori $\lambda_{1,2,3}$ con molteplicità algebriche 1;
per $k = -2$ autovalori 5 con molteplicità algebrica 2 e -5 con molteplicità algebrica 1;
per $k = 0$ autovalori 1 con molteplicità algebrica 2 e 7 con molteplicità algebrica 1;
per $k = 3$ autovalore 10 con molteplicità algebrica 3

(E) Per $k \neq -2, 0, 3$ autovalori $\lambda_{1,2,3}$ con molteplicità geometriche 1;
per $k = -2$ autovalori 5 e -5 con molteplicità geometrica 1;
per $k = 0$ autovalori 1 e 7 con molteplicità geometrica 1;
per $k = 3$ autovalore 10 con molteplicità geometrica 2;
dunque A è diagonalizzabile per $k \neq -2, 0, 3$