



1. Trovare gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} 1+2i & 2 \\ -2i & -2-i \end{pmatrix}$ e una base di \mathbb{C}^2 che la diagonalizza.
2. Calcolare $\int_{\alpha} y^3$ con $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 2t \end{pmatrix}$.
3. Calcolare $\int_{\alpha} \frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}$ con $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ -2\cos(t) \end{pmatrix}$.
4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ per $[1 : 0 : 1 : -1]$ e $[0 : 1 : 2 : 1]$ incontra la retta passante per $[2 : -3 : 0 : 1]$ e $[1 : t : 1 : 3]$.
5. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ l'equazione $(t+2)x^2 + 2y^2 - \frac{1}{2}z^2 + 2(1-t)xy + 2yz + 6z = 0$ definisce un paraboloide iperbolico.
6. Calcolare $\int_{\partial R} \frac{1}{2}(x dy - y dx)$ dove $R = [1, 6] \times [-1, 3]$.
7. Per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste M matrice ortogonale tale che $M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -5 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Al variare di $z = x + iy$ in \mathbb{C} considerare le matrici

$$M = \begin{pmatrix} z+1 & \bar{z}+2i \\ 2-i & 1+3i \end{pmatrix}, \quad H = M + M^*, \quad A = M - M^*.$$

- (A) (1 punto) Esplicitare H e A in funzione di x e y .
- (B) (2 punti) Provare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ la H ha autovalori reali ed esiste una base ortonormale di \mathbb{C}^2 costituita da autovettori di H .
- (C) (3 punti) Al variare di $z \in \mathbb{C}$ determinare i segni degli autovalori di H .
- (D) (2 punti) Provare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ la A ha autovalori immaginari puri ed esiste una base ortonormale di \mathbb{C}^2 costituita da autovettori di H .
- (E) (2 punti) Determinare i valori di z per i quali la A ha autovalori opposti tra loro.
- (F) (2 punti) Determinare gli autovalori di A per $z = -10 - 3i$

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 2k+7 & k & 3 \\ k^2-2k-7 & k^2-k & k^2-3k-4 \\ 1 & 1 & 3k+2 \end{pmatrix}$.

- (A) (2 punti) Provare che $\det(A)$ vale $3k^4 + 22k^3 + 10k^2 + 22k + 7$.
- (B) (2 punti) Sapendo che $p_A(1) = -3k^4 - 18k^3$ determinare $p_A(t)$.
- (C) (2 punti) Sapendo che A ha gli autovalori $\lambda_1 = k + 7$ e $\lambda_2 = 3k + 1$, trovare il terzo λ_3 .
- (D) (3 punti) Al variare di k determinare le molteplicità algebriche degli autovalori di A .
- (E) (3 punti) Al variare di k determinare le molteplicità geometriche degli autovalori di A , deducendone i valori di k per cui A è diagonalizzabile.



Risposte

5. \diamond

1. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = i; v_1 = \begin{pmatrix} i-1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $\frac{4}{27}(13\sqrt{13} - 8)$

3. 2π

4. $t = -2$

5. $t = -1$ e $t = 7$

6. 20

7. $\lambda = \pm\sqrt{30}$

1. \spadesuit 2. \heartsuit 3. \spadesuit 4. \clubsuit 5. \diamond 6. \spadesuit 7. \clubsuit 8. \heartsuit 9. \clubsuit 10. \diamond



Soluzioni

1.

$$(A) H = \begin{pmatrix} 2x+2 & x+2-i(y-3) \\ x+2+i(y-3) & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2iy & x-2+i(1-y) \\ 2-x+i(1-y) & 6i \end{pmatrix}$$

(B) H è hermitiana(C) Uno positivo e uno nullo per $z = 3i$, discordi altrimenti(D) A è antihermitiana(E) $z = x - 3i$ (F) $\pm 14i$

2.

(A) Sottraendo la prima riga dalla seconda e poi la seconda colonna dalla prima ci si riconduce a $(k+7) \cdot \det \begin{pmatrix} k^2 & k^2 - 3k - 1 \\ 1 & 3k - 2 \end{pmatrix}$ e i conti sono facili

$$(B) p_A(t) = t^3 - t^2(k^2 + 4k + 9) + t(4k^3 + 11k^2 + 26k + 15) - 3k^4 - 22k^3 - 10k^2 - 22k - 7$$

$$(C) \lambda_3 = k^2 + 1$$

(D) Per $k \neq -2, 0, 3$ autovalori $\lambda_{1,2,3}$ con molteplicità algebriche 1;
per $k = -2$ autovalori 5 con molteplicità algebrica 2 e -5 con molteplicità algebrica 1;
per $k = 0$ autovalori 1 con molteplicità algebrica 2 e 7 con molteplicità algebrica 1;
per $k = 3$ autovalore 10 con molteplicità algebrica 3

(E) Per $k \neq -2, 0, 3$ autovalori $\lambda_{1,2,3}$ con molteplicità geometriche 1;
per $k = -2$ autovalori 5 e -5 con molteplicità geometrica 1;
per $k = 0$ autovalori 1 e 7 con molteplicità geometrica 1;
per $k = 3$ autovalore 10 con molteplicità geometrica 2;
dunque A è diagonalizzabile per $k \neq -2, 0, 3$