Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 7/6/14 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ trovare $p_A(t)$ sapendo che $\mathrm{tr}(A) = -4$, che $\det(A) = 11$ e che $p_A(-1) = -3$.

2. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ unitarî e ortogonali sia a $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ sia a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} t^2 & t^2+t-3 \\ 5-t & 3t \end{pmatrix}$
ammette una base ortonormale di autovettori, e per quali di tali t gli autovalori sono positivi.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $5z^2 + 2xy - 2xz - 4yz + 2x - 2z = 0$.

6. Determinare i punti di intersezione del luogo $\{[t+1 : -t : t-1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) :\ t \in \mathbb{R}\}$
con l'insieme dei punti all'infinito della quadrica $x^2 - 5z^2 + 2xy + yz + 5x + 7 = 0$.

7. Calcolare $\int_\alpha \sin(x^2 - 2y)(x\,\mathrm{d}x - \,\mathrm{d}y)$ con $\alpha :\ [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ \frac{\pi t}{t+1} \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 7/6/14 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2k-3 & k-1 & 1 \\ k^2-3k+2 & k^2+k & k-1 \\ -2k^2+6k-6 & -2k^2+3k-3 & 2 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che $\det(A_k) = 2k^4 + k^3 - 3k^2 - k + 1$.

(B) (2 punti) Sapendo che $p_{A_k}(-1) = -2k^3(k+2)$ trovare $p_{A_k}(t)$.

(C) (1 punto) Sapendo che A_k ha gli autovalori $\lambda_1 = k+1$ e $\lambda_2 = 2k-1$, trovare il terzo λ_3.

(D) (2 punti) Al variare di k trovare le molteplicità algebriche dei λ_j.

(E) (4 punti) Al variare di k trovare le molteplicità geometriche dei λ_j, deducendone i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile.

2. Considerare la curva $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s + \ln(1+s^2) \\ 2s - e^s \\ 3s^2 - \sin(s) \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Trovare il dominio di α.

(B) (2 punti) Provare che α è regolare sul suo dominio.

(C) (3 punti) Trovare il riferimento di Frénet di α in $s = 0$.

(D) (3 punti) Calcolare curvatura e torsione di α in $s = 0$.

(E) (3 punti) Calcolare $\int_\beta (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$ dove β è la restrizione di α a $[0,1]$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. ♢

1. $t^3 + 4t^2 - 5t - 11$

2. $\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 6,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. $\pm\frac{1}{5\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 17 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}$

4. $t = -4$ e $t = 2$; $t = 2$

5. Iperboloide a una falda

6. $[2 : -1 : 0]$ e $[-11 : 4 : 3]$

7. 1

Soluzioni

1.

(A) Sostituire la terza riga con sé stessa più 2 volte la seconda, poi la prima colonna con sé stessa meno la seconda; a questo punto sostituendo la prima colonna con sé stessa meno $k-2$ volte la terza e la seconda meno $k-1$ volte la terza ci si riduce a una matrice 2×2 per la quale si possono fare i conti

(B) $p_{A_k}(t) = t^3 - (k^2+3k-1)t^2 + (3k^3+2k^2-2k-1)t - (2k^4+k^3-3k^2-k+1)$

(C) $\lambda_3 = k^2 - 1$

(D) Per k diverso da -1, 0 e 2 tutti i λ_j hanno m.a. 1;
per $k=-1$ si ha $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ con m.a. 2 e $\lambda_2 = -3$ con m.a. 1;
per $k=0$ si ha $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ con m.a. 2 e $\lambda_1 = 1$ con m.a. 1;
per $k=2$ si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$ con m.a. 3

(E) Per k diverso da -1, 0 e 2 tutti i λ_j hanno m.g. 1, dunque A_k è diagonalizzabile;
per $k=-1$ si ha m.g.$(0) = 1$ e m.g.$(-3) = 1$, dunque A_k non è diagonalizzabile;
per $k=0$ si ha m.g.$(-1) = 2$ e m.g.$(1) = 1$, dunque A_k è diagonalizzabile;
per $k=2$ si ha m.g.$(3) = 1$, dunque A_k non è diagonalizzabile

2.

(A) $\mathbb{R}$

(B) La prima componente di $a'(s)$ si annulla solo in $s=-1$, e la seconda solo in $s=\ln(2)$

(C) $t(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $n(0) = \frac{1}{7\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$, $b(0) = \frac{1}{7\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$

(D) $\kappa(0) = \frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$, $\tau(0) = \frac{5}{98}$

(E) $(2-e)(1+\ln(2))$.