ETA 26/9/13 2°

Complesso di catene: successione di gruppi abeliani con omomorfismi

$$\cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \to 0 \to 0$$

t.c. $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0 \quad \forall n$

$Z_n(\mathcal{C}) = \operatorname{Ker} \partial_n$ n-cicli $\left(C_n : n\text{-catene} \right)$

$B_n(\mathcal{C}) = \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ n-bordi

$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0 \Longleftrightarrow B_n(\mathcal{C}) \subset Z_n(\mathcal{C}) \Longrightarrow$

$$H_n(\mathcal{C}) = Z_n(\mathcal{C}) / B_n(\mathcal{C})$$ gruppo abeliano

n-esimo gruppo di omologia del complesso di catene $\mathcal{C}$

— o —

Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono complessi di catene, diciamo mappa tra complessi di catene φ una successione $\{\varphi_n : C_n \to C'_n \text{ omomorfismo}\}_{n \in \mathbb{N}}$ t.c.

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\
C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & C'_{n-1}
\end{tikzcd}$$

$\varphi_{n-1} \circ \partial_n =$
$= \partial'_n \circ \varphi_n$
$\forall n \in \mathbb{N}$

Categoria dei complessi di catene:

Obj: i complessi di catene

$Hom(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$: mappe tra complessi

Se $\varphi: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ è una mappa tra complessi di catene,
φ induce $\varphi_{*,n}: H_n(\mathcal{C}) \to H_n(\mathcal{C}')$ $\forall n$.

<u>Verifica</u>: Vorrei definire per

Ricordiamo:
$$H_n(\mathcal{C}) = Z_n(\mathcal{C}) / B_n(\mathcal{C})$$

$z \in Z_n(\mathcal{C})$

$\varphi_{*,n}([z]) = [\varphi_n(z)]$: devo

- $\varphi_n(z) \in Z_n(\mathcal{C}')$
- $z \in B_n(\mathcal{C}) \Rightarrow \varphi_n(z) \in B_n(\mathcal{C}')$

Seguono dalla commutatività:

- $\partial'_n(\varphi_n(z)) = \varphi_{n-1}(\partial_n(z)) = \varphi_{n-1}(0) = 0$
- $z \in B_n(\mathcal{C}) \Rightarrow z = \partial_{n+1}(w) \quad w \in C_{n+1}$

$\Rightarrow \varphi_n(z) = \varphi_n(\partial_{n+1}(w)) = \partial'_{n+1}(\varphi_{n+1}(w))$

$\Rightarrow \varphi_n(z) \in B_n(\mathcal{C}')$. $\boxed{}$

Complesso $\mathcal{C}$ di catene $\longmapsto \{H_n(\mathcal{C})\}_{n=0}^{+\infty}$

successione di gruppi ab

Mappa $(\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}') \longmapsto (\varphi_* : \{H_n(\mathcal{C})\} \to \{H_n(\mathcal{C}')\})$

FATTO: H (funtore omologia) è un funtore covariante dalla categoria dei complessi di catene a quella delle successioni di gruppi abeliani.

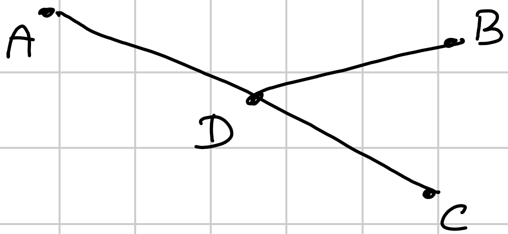
COMPLESSO SIMPLICIALE (GEOMETRICO) FINITO

K un insieme finito di simplessi in $\mathbb{R}^n$ con:

1) Se $\sigma \in K$ e τ è faccia di σ allora $\tau \in K$
2) Se $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ allora $\sigma_1 \cap \sigma_2$ è faccia di entrambi (o $\emptyset$)

Notazione: $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$, $K^{[n]} = \{\sigma \in K : \dim(\sigma) = n\}$,

$K^{(n)} = K^{[0]} \cup \dots \cup K^{[n]}$



$\{A, B, C, \overline{AC}, \overline{BD}\}$ No

$\{\ \dots \qquad , D\}$ No

$\{A, B, C, D, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{DC}\}$ Sì

Sia K un complesso simpliciale in cui ogni simplesso ha una fissata arbitraria orientazione.

Def: Complesso di catene simpliciale di K

$C_n(K)$ = il gruppo abeliano libero generato da $K^{[n]}$
= l'insieme delle comb. lin. formali a coeff in $\mathbb{Z}$ degli n simplessi in K

Se $\sigma \in K^{[n]}$ e τ è faccia di codim. 1 di σ pongo $\varepsilon(\sigma, \tau) = \begin{cases} +1 & \text{se } \tau \text{ è orientato come faccia di } \partial\sigma \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\partial_m(\sigma) = \sum_{\substack{\tau \in K^{[m-1]} \\ \tau \subset \sigma}} \varepsilon(\sigma,\tau)\cdot\tau$$

Estendo $\partial_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ per $\mathbb{Z}$-linearità.

<u>Cor</u> (della Prop $\begin{matrix}\sigma \rightsquigarrow F \rightsquigarrow \tau \\ \sigma \rightsquigarrow G \rightsquigarrow \tau\end{matrix}$ opposte) : $\partial_{m-1} \circ \partial_m \sigma = 0 \quad \forall \sigma \in K^{(m)}$

<u>Hint</u>: se F, G sono orientate come in $\partial\sigma$
e τ è orientato come in ∂F

$\varepsilon(\sigma,F)=+1 \quad \varepsilon(\sigma,G)=+1 \quad \varepsilon(F,\tau)=+1 \quad \varepsilon(G,\tau)=-1$

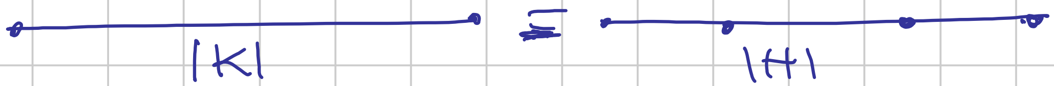
e il coeff di τ in $\partial_{n-1}\partial_n\sigma$ è

$$\varepsilon(\sigma,F)\cdot\varepsilon(F,\tau)+\varepsilon(\sigma,G)\cdot\varepsilon(G,\tau)=0. \qquad \blacksquare$$

Poiché $C_n(K)$ è un complesso di catene sono definiti i gruppi di omologia

$$H_n(K) \quad \text{— omologia simpliciale di } K$$

Speranza: Provare che $H_n(K) = H_n(|K|)$



PROP: $H_n(K)$ non dipende dalle orientazioni dei simplessi di K a meno di isomorfismo.

Dim: Sia $\tilde{K}$ lo stesso complesso di K con altre orientazioni dei simplessi. Definisco

$\varphi_n : C_n(K) \longrightarrow C_n(\tilde{K})$ estendendo per $\mathbb{Z}$-lin

$$\varphi_n(\sigma) = \delta(\sigma)\cdot\sigma \quad \text{con}$$

$$\delta(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma \text{ ha stessa orientaz. in } K \text{ e } \tilde{K} \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ovvio: φ_n isomorfismo. Affermo

$$\begin{array}{ccc} C_n(K) & \xrightarrow{\partial_n^K} & C_{n-1}(K) \\ \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} \\ C_n(\tilde{K}) & \xrightarrow{\partial_n^{\tilde{K}}} & C_{n-1}(\tilde{K}) \end{array}$$

(ciò basta: φ_* è isomorfismo indotto dalle φ_n^{-1})

$\sigma \in C_n(K)$

$$\varphi_{n-1}(\partial_n^K \sigma) = \varphi_{n-1} \sum \varepsilon^K(\sigma,\tau)\cdot\tau = \sum \varepsilon^K(\sigma,\tau)\cdot\delta(\tau)\cdot\tau$$

$$\partial_n^{\tilde{K}}(\varphi_n\sigma) = \partial_n^{\tilde{K}}(\delta(\sigma)\cdot\sigma) = \delta(\sigma)\cdot\sum \varepsilon^{\tilde{K}}(\sigma,\tau)\cdot\tau$$

$$\delta(\sigma)\cdot\varepsilon^K(\sigma,\tau)\cdot\delta(\tau)$$

quindi. $\blacksquare$