ETA 26/11/13

Numero di Lefschetz di $f : X \to X$ $\quad (X = |K|)$

Visto: $\chi(X) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{rank}(H_i(X)) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \# K^{[i]}$

Prop.

Prop: Sia $\mathcal{C} = \{(C_n, \partial_n)\}$ complesso di catene di $\mathbb{F}$-spazi vett e $\{H_n(\mathcal{C})\}$ l'omologia; sia $\varphi: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ mappa tra c.c. e $\varphi_*: H(\mathcal{C}) \to H(\mathcal{C})$ indotta. Allora

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot tr(\varphi_i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot tr(\varphi_{i*}).$$

Dim: $\forall i$ $\quad B_i \subset Z_i \subset C_i$

bordi cicli catene

Scelgo basi $\underbrace{\mathcal{B}_i}$, $\mathcal{H}_i$, $\mathcal{K}_i$ in modo che

$$\underbrace{\overbrace{\qquad\qquad}^{\text{di } B_i}\qquad\qquad}_{\text{di } Z_i} \quad \text{di } C_i \qquad\qquad \partial_i K_i = \mathcal{B}_{i-1}$$

(Parto da $\mathcal{B}_0$ base di B_0; estendo a $\mathcal{B}_0, \mathcal{H}_0$ base di $Z_0 = C_0$; sollevo $\mathcal{B}_0$ a $K_1 \subset C_1$; scelgo $\mathcal{B}_1$ base di B_1, completo a base $\mathcal{B}_1, \mathcal{H}_1$ di Z_1 e avanti; per costruzione $\mathcal{B}_1, \mathcal{H}_1, K_1$ è base di C_1 e procedo.)

Nota che $\mathcal{H}_i$ si proietta a base $\overline{\mathcal{H}_i}$ di H_i.

Poiché $\varphi : C \to C$ è mappa tra complessi

$\varphi(B_i) \subset B_i$ e $\varphi(Z_i) \subset Z_i$

$$\Longrightarrow [\varphi_i]^{(\mathcal{B}_i, \mathcal{H}_i, \mathcal{K}_i)}_{(\mathcal{B}_i, \mathcal{H}_i, \mathcal{K}_i)} = \begin{pmatrix} M_i & X_i & Y_i \\ 0 & N_i & W_i \\ 0 & 0 & P_i \end{pmatrix}$$

e $[\varphi_{i*}]^{\overline{\mathcal{H}_i}}_{\overline{\mathcal{H}_i}} = N_i$.

So che $\varphi_{i-1} \circ \partial_i = \partial_i \circ \varphi_i$ e $\partial_i K_i = \mathcal{B}_{i-1}$ –

Per def. di matrice associata ho

$$[\varphi_i]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i} = M_i$$ significa $\varphi_i \cdot \mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i \cdot M_i$ –

Analogamente:

$$\varphi_i \cdot K_i = \mathcal{B}_i \cdot Y_i + H_i \cdot W_i + K_i \cdot P_i$$

$$\Rightarrow \varphi_{i-1} \cdot \mathcal{B}_{i-1} = \mathcal{B}_{i-1} \cdot M_{i-1}$$

$$\varphi_{i-1} \cdot \partial_i \cdot K_i$$

$$\partial_i \cdot \varphi_i \cdot \mathcal{K}_i = \partial_i \left(\mathcal{B}_i \cdot Y_i + \mathcal{H}_i \cdot W_i + \mathcal{K}_i \cdot \underline{P}_i \right)$$

$$= \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \mathcal{B}_{i-1} \cdot \underline{P}_i$$

$$\Longrightarrow P_i = M_{i-1}$$

$$\sum (-1)^i \operatorname{tr}(\varphi_i) = \sum (-1)^i \left(\operatorname{tr} M_i + \operatorname{tr} N_i + \underbrace{\operatorname{tr} \underline{P}_i}_{= \operatorname{tr} M_{i-1}} \right)$$

$$= \sum (-1)^i \underbrace{\operatorname{tr}(N_i)}$$

$\mathrm{tr}(\varphi_{i_*})$ _

Def: chiamo numero di Lefschetz di $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

$$\lambda(\varphi) = \sum_i (-1)^i \mathrm{tr}\, \varphi_i = \sum (-1)^i \mathrm{tr}(\varphi_{i_*})$$

Oss: $\chi(\mathcal{C}) := \sum (-1)^i \dim H_i(\mathcal{C})$

$\Rightarrow \chi(\mathcal{C}) = \lambda(\mathcal{C} \xrightarrow{id} \mathcal{C})$

infatti $\mathrm{tr}(C_i \xrightarrow{id} C_i) = \dim C_i$ _

Se $\{(C_n, \partial_n)\}$ è complesso di gruppi abeliani

e $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ è mappa ...

$$tr(\varphi_i) := tr\left(\varphi_i \otimes id_{\mathbb{Q}} : C_i \otimes \mathbb{Q} \to C_i \otimes \mathbb{Q}\right)$$

$$tr(\varphi_{i*}) := \begin{cases} tr\left(\overline{\varphi_{i*}} : H_i \otimes \mathbb{Q} \circlearrowleft\right) \\ tr\left(\varphi_{i*}^{\mathbb{Q}} : H_i^{\mathbb{Q}} \circlearrowleft \quad \text{con } H_i^{\mathbb{Q}} = H_i(\mathcal{C} \otimes \mathbb{Q})\right) \end{cases}$$

Fatto: $H_i^{\mathbb{Q}} \cong H_i \otimes \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ le due def. coincidono.

Dunque posso definire $\lambda(\varphi)$ anche per gruppi ab.
e vale $\lambda(\varphi) = \lambda(\varphi_*)$.

Def: Se $X = |K|$ e $f : X \to X$ continua
posso definire $\lambda(f)$ come $\lambda(\varphi) = \lambda(\varphi_*)$

con $\varphi : K_1 \to K_1$ approssimazione simpliciale di f. (Ben def perché $\lambda(\varphi_*)$ lo è e non cambia a meno di omotopia di φ.)

<u>Teo</u> (punto fisso di Lefschetz):

$X = |K|$ $\quad$ K c.s. finito

$f : X \to X$ continua, $\lambda(f) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$.

Oss: $Fix(f)$ cambia omotopando f mentre $\Lambda(f)$ no.

Lem: $f: K \to K$ simpliciale, sostituendo K con K' (prima suddivisione baricentrica) si ha che $Fix(f)$ è un sottocomplesso.

Dim: Basta provare che $\forall \sigma \in K$

$Fix(f) \cap \sigma$ è un sottocomplesso di K'

$\Rightarrow$ quando $f : \sigma \to K$; se $v \in \sigma^{[0]}$ e $f(v) \notin \sigma^{[0]}$ allora $Fix(f) \subset$ faccia τ di σ opposta a v.

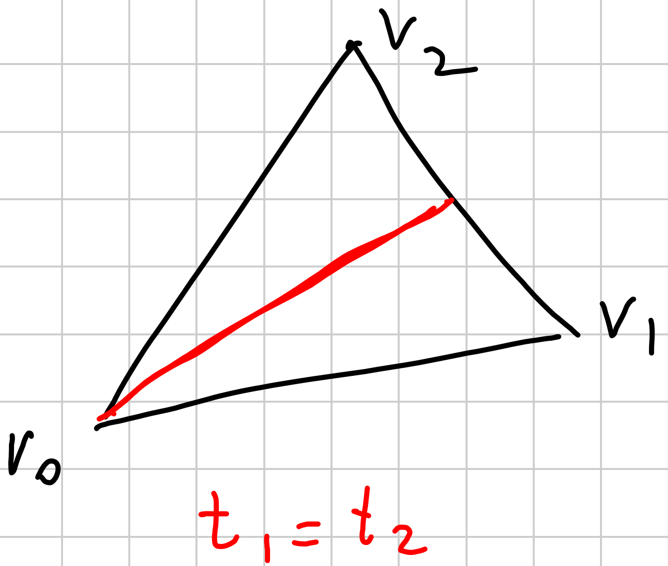
$\Rightarrow$ al posto di σ prendo e itero finché $f(\sigma) \subset \sigma$.

Se $f(\sigma)$ è una faccia propria di σ ho $Fix(f) \subset f(\sigma)$; sostituisco σ con $f(\sigma)$ e itero finché $f(\sigma) = \sigma \Rightarrow f$ è indotta da permutazione η dei vertici di σ.

Se $\sigma = \mathrm{Conv}(v_0, \dots, v_n)$

$$\mathrm{Fix}(f) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i v_i \ : \ \begin{array}{l} t_i \geq 0 \quad \sum t_i = 1 \\ t_{\eta(i)} = t_i \end{array} \right\}$$

Per concludere basta vedere che ogni equazione $t_i = t_j$ definisce un sottocomplesso di σ!



$\sigma' =$ 

Formalmente: per induz. su $\dim(\sigma)$ usando:

$Lij(\sigma) := \{ p \in \sigma : t_i(p) = t_j(p) \}$

(1) $Lij(\sigma) = $ Cono da (baricentro σ) su $\bigcup_{\tau \subset \partial\sigma} L_{ij}(\tau)$

$$(2)\quad \text{``}L_{ij}(\tau) = \begin{cases} \tau & \text{se } v_i \text{ o } v_j \text{ non sono vertici di } \tau \\ L_{ij}(\tau) & \text{altrimenti.} \end{cases}\text{''} \qquad \square$$

<u>Lem</u>: Se $\mathrm{Fix}(f)$ è un sottocomplesso di K ($f : K \to K$ simpliciale) e $f(\sigma) = \sigma \Rightarrow \sigma \subset \mathrm{Fix}(f)$.

<u>Dim</u>: il baricentro di σ è fisso e il simplesso che lo contiene al suo interno è σ $\Rightarrow \sigma$ è fisso. $\square$

Lem: Se $f: K \to K$ è simpliciale e $\mathrm{Fix}(f)$ è sottocomplesso allora $\lambda(f_*) = \chi(\mathrm{Fix}(f))$

(dunque se $\lambda(f_*) \neq 0$ allora $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$.)

Dim: $\lambda(f_*)$ posso calcolarlo al livello delle catene e a questo livello sulle diagonali ho entrate non nulle per ogni $\sigma \in K$ t.c. $f(\sigma) = \sigma$ ma in tal caso ho $f(\sigma) = + \sigma$ $(f|_\sigma = id)$

Per f_i sulla diag. ho tante entrate +1 quanti $\sigma \in K^{[i]}$ sono in $\mathrm{Fix}(f)$

$$\Rightarrow \lambda(f) = \sum (-1)^i \,\mathrm{tr}(f_i) = \sum (-1)^i \,\#\, \mathrm{Fix}(f)^{[i]}$$

$$= \chi(\mathrm{Fix}(f)).$$

$\square$

Dimo (Teo): $f : |K| \to |K|$ continua con $\lambda(f) \neq 0$. Sia p.a. $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$; posso trovare $\varepsilon > 0$ t.c. $d(x, f(x)) \geq \varepsilon$ $\forall x \in |K|$.
Prendo K_1 suddivisione $\max\mathrm{diam}(K_1) < \varepsilon/2$ e K_2 suddivisione con $g : K_2 \to K_1$ approssimazione simpliciale di f, dunque
$d(f(x), g(x)) < \varepsilon/2$ $\forall x \in |K|$.

<u>Scorciatoia</u>: $\lambda(g) = \lambda(f) \neq 0$ (vero: $\exists$ inv/$\simeq$)

$\Rightarrow$ per il Lemma prec. g ha punti fissi

mentre $d(x, g(x)) \geq d(f(x), x) - d(g(x), f(x)) > \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2$.

non si applica: $g: K_2 \to K_1$ non $g: K_2 \to K_2$.

<u>Invece</u>: $\alpha : \mathcal{C}(K_1) \longrightarrow \mathcal{C}(K_2)$

espressione di ogni simplesso di K_1 come somma di simplessi di K_2, che induce l'isomorfismo canonico in omologia.

Inoltre $g_* : \mathcal{C}(K_2) \to \mathcal{C}(K_1)$

$\Rightarrow \alpha \circ g_* : \mathcal{C}(K_2) \to \mathcal{C}(K_2)$ e

$\lambda(\alpha \circ g_*) = \lambda(g) = \lambda(f) \neq 0$

$\Rightarrow$ deve esistere almeno un simplesso σ di K_2 che ha coeff non nullo in $\alpha(g(\sigma))$

$\Longrightarrow$ $\sigma \subset g(\sigma)$; ora l'assumo come prima ... (facile) — $\blacksquare$

———— o ————

Omologia singolare

$$\Delta_n = \mathrm{Conv}(e_0, \dots, e_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\varphi_i^{(n)} : \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n$$

"parametrizzazione ovvia tramite Δ_{n-1} della faccia di Δ_n opposta a e_i"

cioè $(e_0, \dots, e_{n-1}) \longmapsto (e_0, \dots \widehat{e_i} \dots e_n)$

cioè $\varphi_i^{(n)}(e_j) = \begin{cases} e_j & j < i \\ e_{j+1} & j \geq i \end{cases} \qquad i = 0, \dots, n.$

Chiamo n-simplesso singolare in X sp. top. una $\sigma : \Delta_n \longrightarrow X$ continua

$C_n^{sing}(X)$ = gruppo abeliano libero generato dagli n-simplessi singolari

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \sigma_i \ : \ p_i \in \mathbb{Z}, \ \sigma_i : \Delta_n \to X \text{ cont.} \right\}$$

(n-catene singolari)

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \sigma \circ \varphi_i^{(n)}$$

<u>Oss</u>: se $X = |K|$ e σ è una parametrizzazione di un n-simplesso τ in K, $\partial_n \sigma$ dà una parametrizzazione di $\partial \tau$.

<u>Oss</u>: $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$

$\Rightarrow$ Ho $H_n^{sing}(X)$ -

<u>Oss</u>: $H_n^{sing}(X) \cong H_n^{\Delta}(S(X))$

$$S(X) = \bigsqcup_{\substack{\sigma : \Delta_n \to X \\ n = 0, 1, \dots}} \Delta^{(\sigma)}_{n(\sigma)} \Big/ \sim$$

$\sim$ generata da $p \sim q$ se $p \in \Delta^{\tau}_{n(\tau)}$, $q \in \Delta^{\sigma}_{n(\sigma)}$

e $\tau = \sigma \circ \varphi_i^{(n(\sigma))}$ e $q = \varphi_i^{(n(\sigma))}(p)$.

Oss: Sia $z \in Z_n^{\text{sing}}(X)$.

Abbiamo $z = \sum_{i=1}^{k} p_i \sigma_i$ $\quad \sigma_i : \Delta_n \to X$

sostituendo $p_1 \cdot \sigma_1 = \pm (\underbrace{\sigma_1 + \dots + \sigma_1}_{|p_1| \text{ volte}})$

possiamo supporre $p_i = \pm 1$.

Ora $\partial z = 0$ significa che per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$ e per ogni $j \in \{0, \dots, n\}$ esiste $i' \in \{1, \dots, k\}$ e $j' \in \{0, \dots, n\}$ t.c.

$$(*) \quad \sigma_i \circ \varphi_j^{(n)} = \sigma_{i'} \circ \varphi_{j'}^{(n)}$$

e $\quad p_i \cdot (-1)^j + p_{i'} \cdot (-1)^{j'} = 0$

Posso prendere $\bigsqcup_{i=1}^{k} \Delta_n^{(i)}$ e identificare

tra loro a coppie le $n-1$ facce se

usando la (*) .

Tali identificazioni

invertono le orientazioni

indotte e $\bigsqcup_{i=1}^{k} \sigma_i$ passa al quoziente .

mettendo su $\Delta_n^{(i)}$

l'orientazione

$(-1)^i \times$ canonica

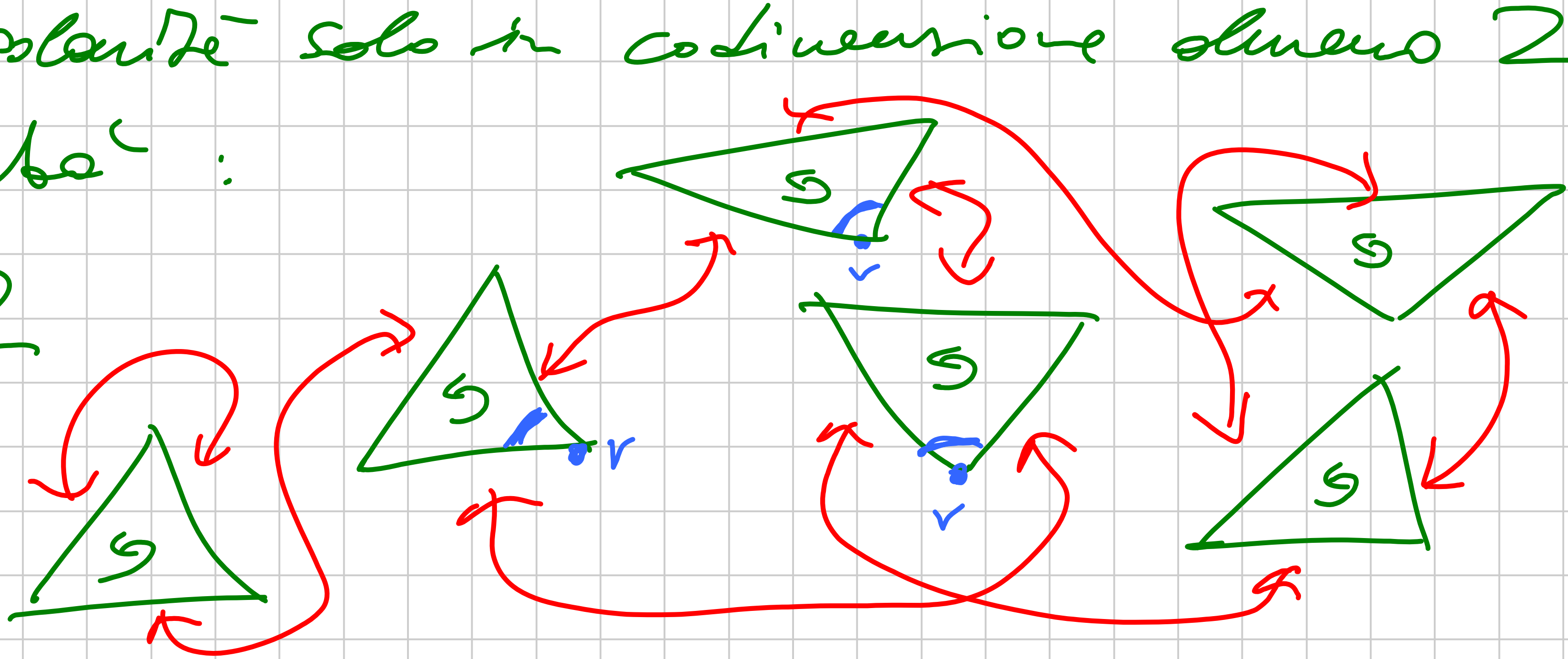
<u>Morale</u>: una n-catena fornisce una mappa continua

$$\frac{\bigsqcup (n\text{-simplessi orientati})}{\text{identificazioni a coppie delle } (n-1) \text{ facce, e che invertono l'orientazione}} \longrightarrow X$$

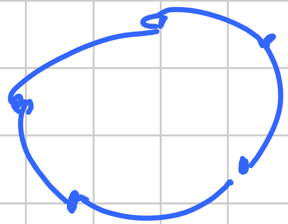
"Quasi" una n-varietà orientata

con singolarità solo in codimensione almeno 2;
in realtà:

$n = 2$



$link(v) =$



$\simeq S^1$

Fatto: le singolarità sono in codimensione ≥ 3.

Dunque: 1-ciclo : coppia de $S^1 \sqcup \ldots \sqcup S^1 \to X$

2-ciclo : coppia $\Sigma \longrightarrow X$

sup. orientata

n-ciclo : $M \longrightarrow X$

n-varietà orientate
con singolarità in
codimensione ≥ 3