ETA 22/10/13

n-Varietà PL: $K \subset \mathbb{R}^N$ complesso simpliciale t.c.

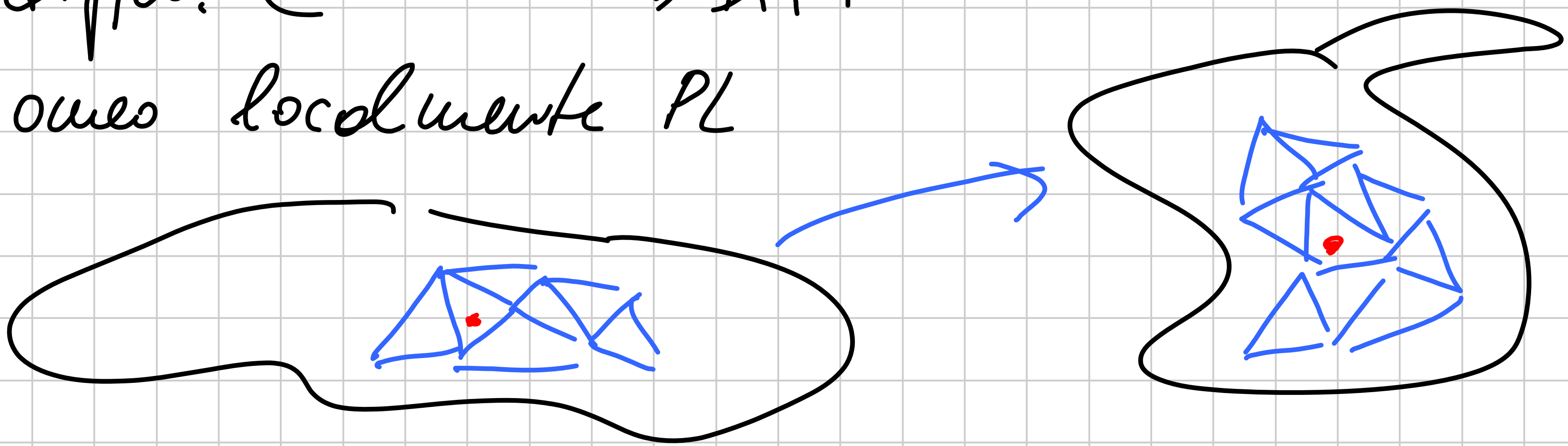
$lk(p, K) \cong_{PL} \partial \Delta_n \quad \forall p \in |K|$

ovvero $St(p, K) \cong_{PL} \Delta_n$ con $p \leftrightarrow x \in int(\Delta_n) \ \forall p \in |K|$.

Comunque data una classe $\mathcal{F}$ di omeo tra aperti di $\mathbb{R}^n$ ($\mathcal{F}$ chiusa per restrizione e composizione):

$\mathcal{G}$-varietà : $M^{(n)}$ T_2 paracpt coperta da carte con cambiamenti di carte in $\mathcal{G}$.

- $\mathcal{G}$ = omeomorfismi $\longrightarrow$ TOP (varietà top)
- $\mathcal{G}$ = diffeo. C^∞ $\longrightarrow$ DIFF
- $\mathcal{G}$ = omeo localmente PL



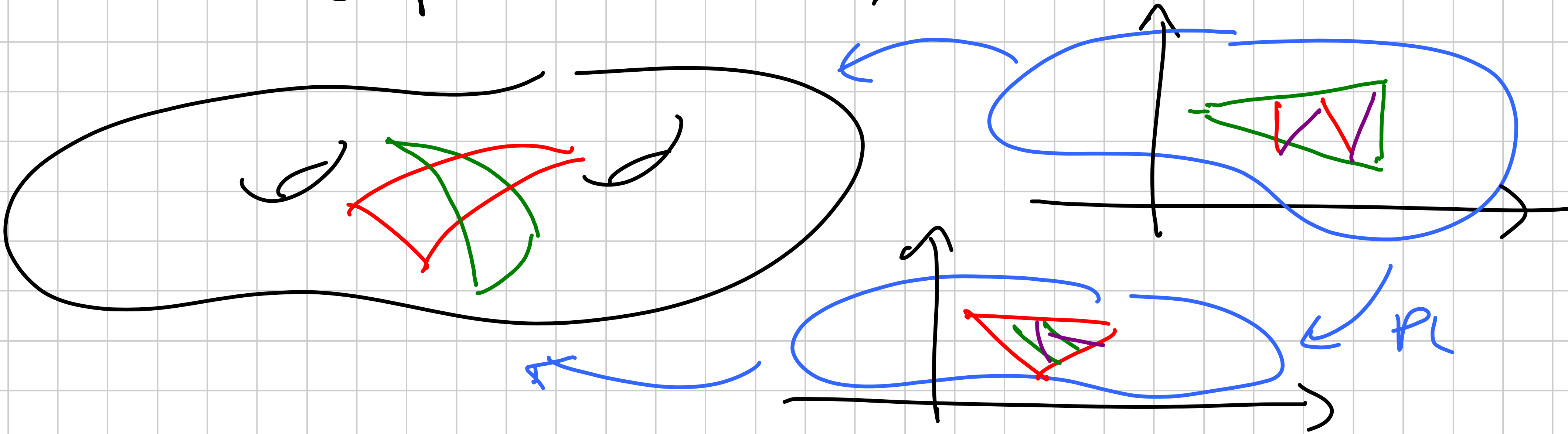
Teo: M^n varietà PL ($lk(p, M) \cong_{PL} \partial \Delta_n$)

$\Updownarrow$

cpt + ammette un atlante PL

Dim: $\Downarrow$: uso come carte gli omeo PL degli intorni dei punti con Δ_n (ristrette all'interno)

$\Uparrow$: ricopro M con un numero finito di carte dell'atlante PL ; prendo le immagini in M dei simplessi dati dalle carte ; prendo tutte le intersezioni possibili e suddivido in "simplessi astratti" usando le carte :



Così costruisco su $\underline{M}$ una struttura di complesso simpliciale astratto finito:

V insieme di vertici, $\# V < +\infty$

$K \subset \mathcal{P}(V)$ chiuso per sottoinsiemi e $\cap$;

posso realizzare M in $\mathbb{R}^V$ mandando

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{letto in qualche carta}}}{\sum t_i v_i} \longrightarrow \sum t_i e_{v_i}$$

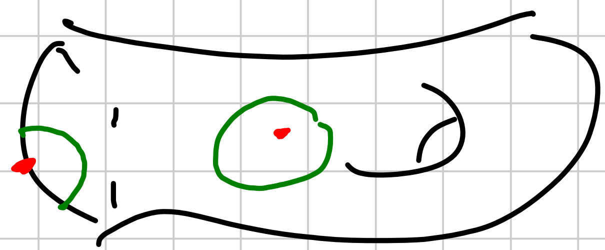
$\{e_v : v \in V\}$ base canonica di $\mathbb{R}^V$.

Trovo $K \subset \mathbb{R}^N$ complesso simpliciale t.c. $|K| \cong M$ e le carte PL di M sono PL per K rispetto a tale omeomorfismo. 

Varietà diff. a bordo: carte sono omeo con aperti di $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,+\infty)$.

Def: $K \subset \mathbb{R}^N$ c.s.f. è n-varietà PL a bordo se valgono i fatti equivalenti:

1. $lk(v, K) \cong_{PL} \partial\Delta_n$ o Δ_{n-1} $\forall v \in K^{(0)}$
2. $lk(p, K) \cong_{PL} \partial\Delta_n$ o Δ_{n-1} $\forall p \in |K|$
3. $St(v, K) \cong_{PL} \Delta_n$ $\forall v \in K^{(0)}$
4. $St(p, K) \cong_{PL} \Delta_n$ $\forall p \in |K|$.



$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ 1 & & 4 \\ & \searrow\!\!\!\Rightarrow 3 \Rightarrow\!\!\!\nearrow & \end{array}$$

$\Rightarrow St(p,K) \cong_{PL} \Delta_n$

$p \leftrightarrow x \in int(\Delta_n)$

$\Longrightarrow lk(p) \cong \partial \Delta_n$

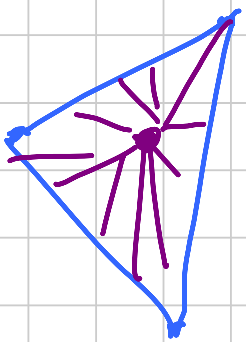
$p \leftrightarrow x \in \partial \Delta_n$

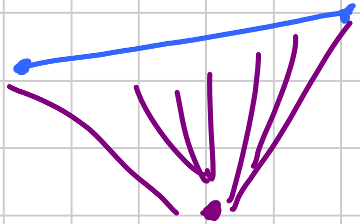
$\Longrightarrow lk(p) \cong \Delta_{n-1}$

facile

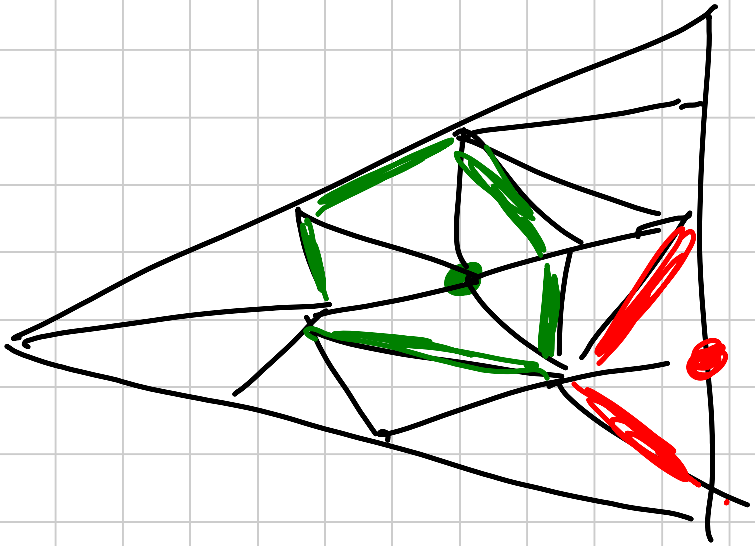
facile

$St(p, \Delta_n) \cong_{PL} \Delta_n$





$Cone(q, \partial \Delta_n) \cong_{PL} Cone(q, \Delta_{n-1}) \cong \Delta_n$

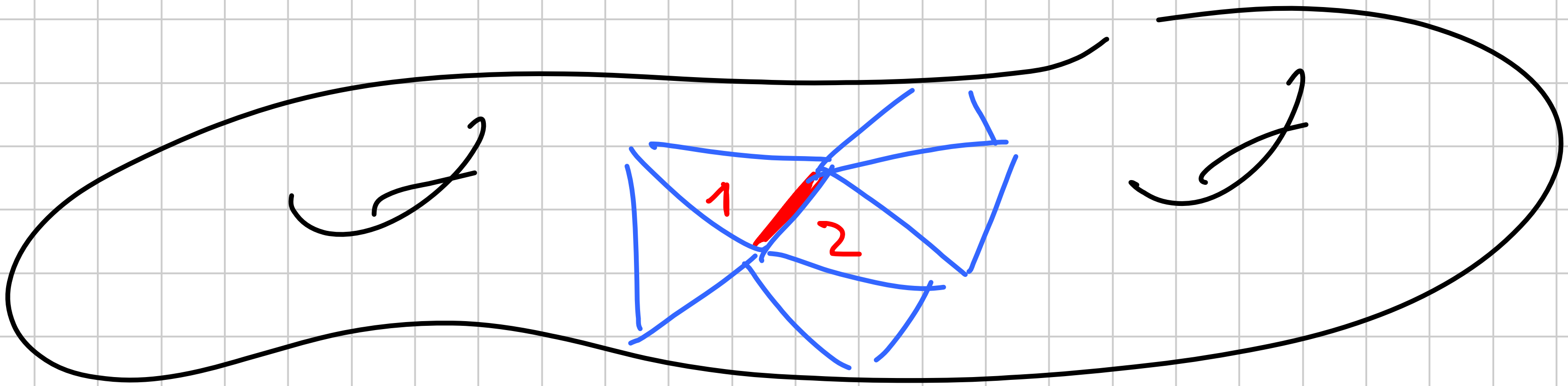


M C^∞ orientata se i cambi di carta hanno tutti $\det(\text{diff}) > 0$.

<u>Oss</u>: se K è varietà PL n-dim

$\tau \in K^{[n-1]} \Rightarrow$ esistono esattamente due

$\sigma \in K^{[n]}$ t.c. $\tau \subset \sigma$

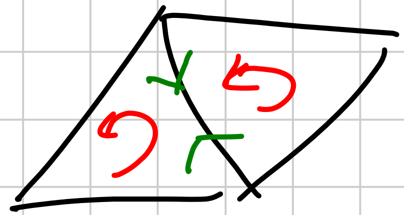


(vero per facce interne di una tria di Δ_n).

Def: chiamo orientazione per K n-var PL una orientazione di ogni $\sigma \in K^{[n]}$ t.c. se $\tau \in K^{[n-1]}$, $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ allora $\varepsilon(\sigma_1, \tau) + \varepsilon(\sigma_2, \tau) = 0$.

Prop: una orientazione PL corrisponde a una scelta di atlante PL con cambi di carte che preservano le orientazioni degli n-simplessi ereditate da $\mathbb{R}^n$.

"Dim": se ho le orientazioni su $K^{[n]}$ uso ovvero PL con aperti di $\mathbb{R}^n$ compatibili con loro; viceversa: oriento i simplessi come nelle carte e noto che la proprietà sugli $(n-1)$-simplessi vale in $\mathbb{R}^n$



$\boxtimes$

Def: M n-var. è chiusa se è cpt e senza ∂

Esercizio: M n-var PL; $\partial M = \{p \in M : lk(p) \cong \Delta_{n-1}\}$

è una $(n-1)$-var. PL senza bordo.

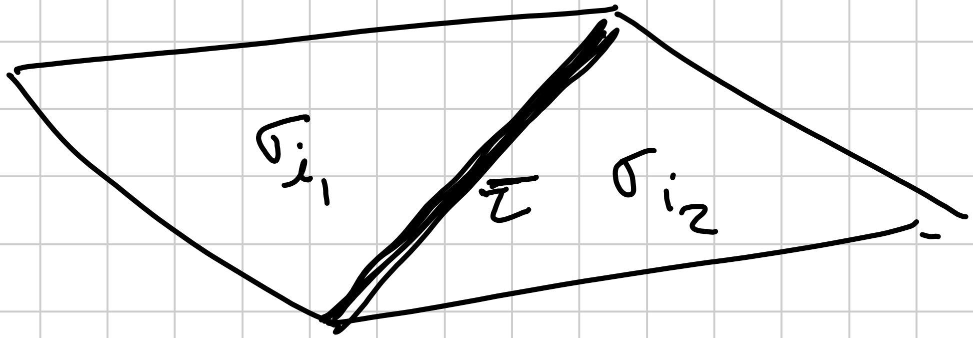
Prop: Sia $M^{(n)}$ chiusa connesso; allora

$$H_n(M) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } M \text{ è orientabile} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dim: Se M è orientabile, ho orientaz. su $M^{[n]}$

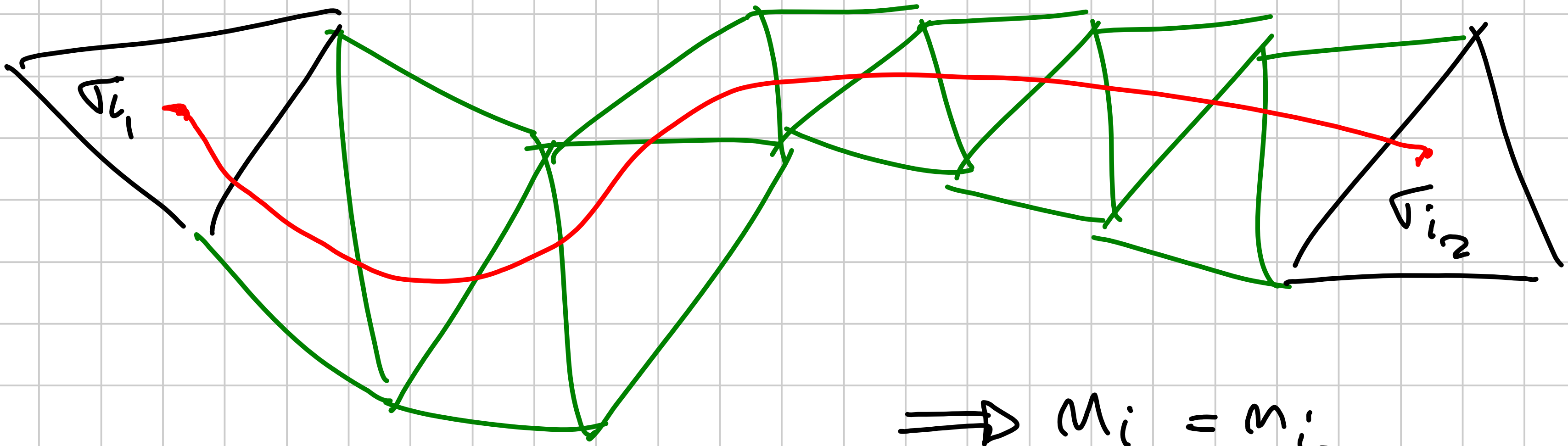
t.c. $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2 \in K^{[n-1]} \Rightarrow \varepsilon(\sigma_1, \tau) + \varepsilon(\sigma_2, \tau) = 0$.

$H_n(M) = \mathbb{Z}_m$; $\partial\left(\sum m_i \sigma_i\right) = 0$



coeff τ in $\sum m_i \sigma_i$ è $m_{i_1} \cdot \varepsilon(\sigma_{i_1}, \tau) + m_{i_2} \cdot \varepsilon(\sigma_{i_2}, \tau)$

$\Longrightarrow m_{i_1} = m_{i_2}$



$\Rightarrow m_{i_1} = m_{i_2}$

$$\Rightarrow Z_n = \mathbb{Z} \cdot \sum_{\sigma \in M^{[n]}} \sigma$$

Se $H_n(M) \neq \{0\}$, cioè $\exists \sum m_i \sigma_i \in Z_n$, $\neq 0$

come sopra vedo che $m_{i_1} = \pm m_{i_2} \quad \forall i_1, i_2$

$\Rightarrow$ tutti gli m_i sono $\neq 0$

Posso cambiare l'orientazione di σ_i per $m_i < 0$

e trovo orientazione per M. $\boxtimes$

<u>Oss</u>: se M è orientata, $H_n(M)$ ha un generatore

canonico $\displaystyle\sum_{\sigma \in M^{[n]}} \sigma =: [M]$ <u>classe fondamentale</u>.

Def: se M, N n-var. PL chiuse orientate (connesse); $f: M \to N$ continua; se $f_*([M]) = d \cdot [N]$ chiamo d il grado di f, indicato $\deg(f)$.

Oss: posso farlo perché so che $f \simeq g$ simpliciale rispetto a suddivisioni e $g_1 \simeq g_2$ simpliciali $\Rightarrow g_{1*} = g_{2*}$ modulo isomorfismi canonici.

Oss: $f_1 \simeq f_2 \Rightarrow \deg(f_1) = \deg(f_2)$.

<u>Cor</u>: $id_M : M \to M$ (M^n chiusa orient)

$\Rightarrow id_M \not\simeq$ const $(n>0)$

$(\deg(id_M)=1, \ \deg(\text{cost})=0 \text{ per } n>0)$.

<u>Oss</u> (calcolo locale del grado):

$f : M \to N$ simpliciale

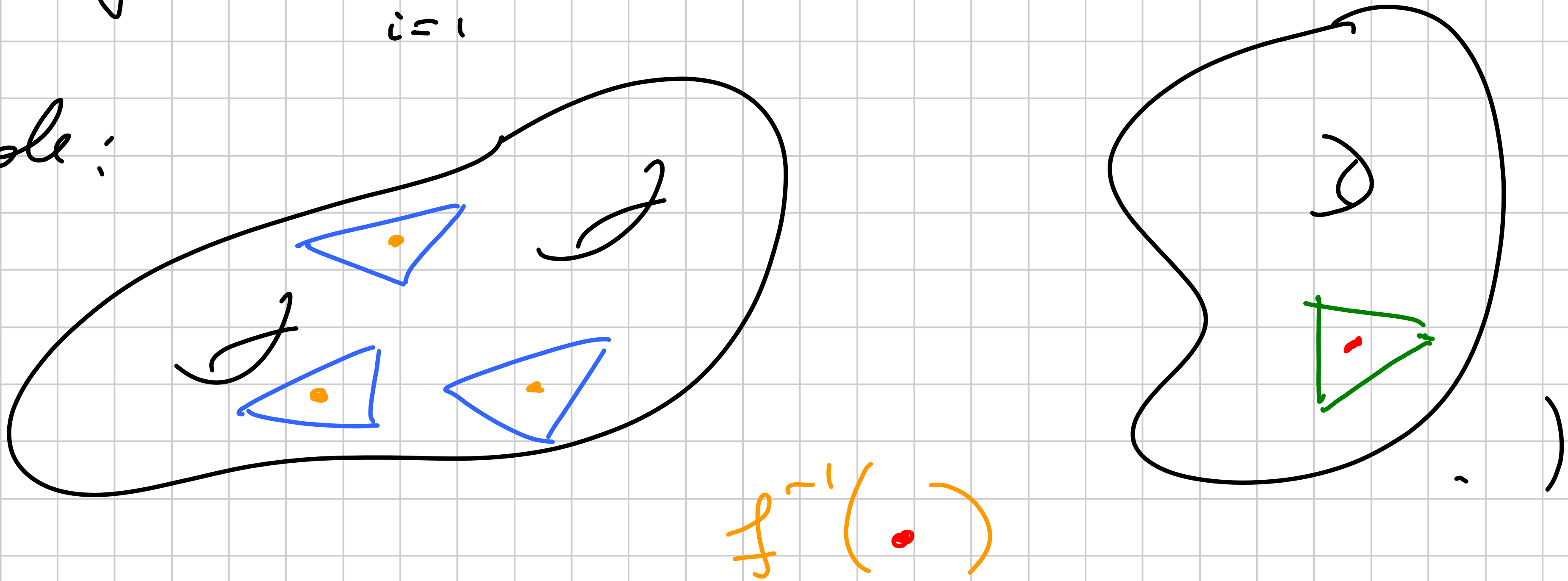
$\sigma_0 \in N^{[n]}$ siano $\tau_1, \dots, \tau_k \in M^{[n]}$ i $\tau \in M^{[n]}$

t.c. $f(\tau)=\sigma_0$

Sia $\varepsilon_i = \begin{cases} +1 & \text{se } f : \tau_i \to \sigma_0 \text{ preserve orient} \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\Rightarrow \deg(f) = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i .$$

(Locale:



)

Dim:

$$[M] = \sum_{\tau \in M^{[n]}} \tau$$

$$f_*(M) = \sum_{\substack{\tau \in M^{[n]} \\ f(\tau) \in N^{[n]}}} \varepsilon(\tau) \cdot f(\tau) = d \cdot \sum_{\sigma \in N^{[n]}} \sigma$$

$$\|$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \right) \sigma_0 + \sum_{\sigma \neq \sigma_0} \left(\quad \right) \cdot \sigma$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i = d. \qquad \boxtimes$$

Def: $f : M \to N$ funz C^∞ tra $M^{(m)}$ e $N^{(n)}$ chiuse C^∞

$x \in M$ è punto regolare se $d_x f$ è suriettivo

($m < n \Longrightarrow$ nessun punto è regolare)

$y \in N$ è valore regolare se x è regolare $\forall x \in f^{-1}(y)$.

Def: $P \subset M$ è sottovarietà se localmente è $\mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$ con $\mathbb{R}^m$ carte C^∞ per M.

$$\{0\} \subset \mathbb{R}^{m-p}$$

Prop: se y è valore regolare di $f : M \to N$ allora $f^{-1}(y)$ è sottovarietà.* Se M, N sono orientate, $f^{-1}(y)$ è canonicamente orientata.

* di dim $m-n$

Dim: $m < n$, $f^{-1}(y) = \emptyset$.

$m \geq n$: localmente ho $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

con $d_0 f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ surgettivo

vicino a un punto di $f^{-1}(y)$

$\Longrightarrow$ (teo funz. implicite)

a meno di cambi C^∞ di coord

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(a, b) \longmapsto a$$

$\Rightarrow$ localmente $f^{-1}(0)$ è $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$.

Per M, N orientate, uso carte $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ compatibili con orient. e scegliamo le carte

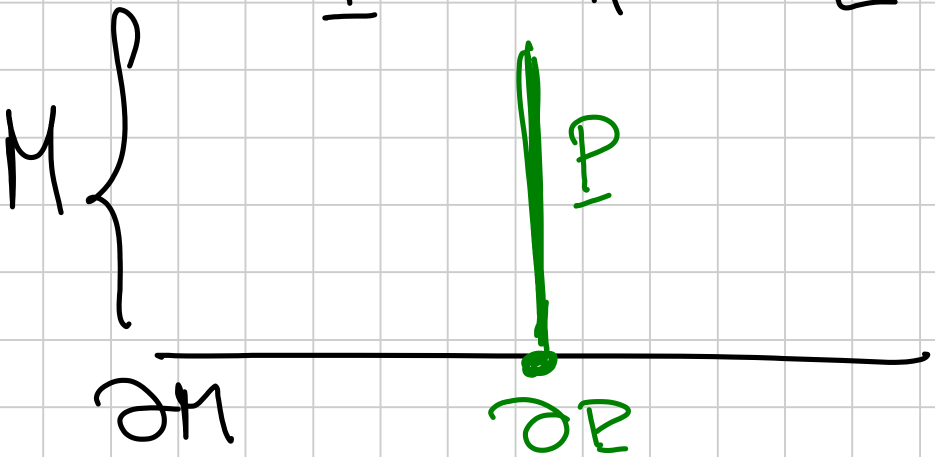
$$\mathbb{R}^{m-n} \longrightarrow \{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$$ positive. ▨

Df: Se $f : M^{(m)} \longrightarrow N^{(n)}$ è C^∞ con $\partial M \neq \emptyset$, $\partial N = \emptyset$ dico y valore regolare di f se è regolare per

$f|_{M\setminus\partial M}$ e anche per $f|_{\partial M}$.

Def: $\underline{P} \subset \underline{M}$ è sottovarietà propriamente embedded se localmente

$$\underline{P} \cong \mathbb{R}^{p-1} \times [0,+\infty) = (\{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}) \times [0,\infty)$$
$$\subset \mathbb{R}^{m-1} \times [0,+\infty)$$



Def: Se $f: M \to N$, $\partial M \neq \emptyset$, $\partial N = \emptyset$

$y \in N$ valore regolare $\Longrightarrow$ $f^{-1}(y)$ è sottovar propriamente embedded di M; orientata se M, N lo sono