ETA 13/11/13

Complessi simpliciali astratti e loro omologia.

$K = (K^{[0]}, \mathcal{F})$ $\quad$ $K^{[0]}$ insieme

$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(K^{[0]})$

- $\sigma \in \mathcal{F} \Rightarrow \#\sigma < +\infty$
- $\forall v \in K^{[0]}$, $\{v\} \in \mathcal{F}$
- $\forall \sigma \in \mathcal{F}$, $\forall \tau \subset \sigma$ si ha $\tau \in \mathcal{F}$

$K^{[n]} = \{\sigma \in \mathcal{F} : \#\sigma = n+1\}$

$$K^{(n)} = \bigcup_{i \leq n} K^{[i]}$$

<u>Realizzazione geometrica</u>:

$$|K| = \left\{ \alpha : K^{[0]} \to [0,1] : \begin{array}{l} \{v \in K^{[0]} : \alpha(v) \neq 0\} \in \mathcal{F} \\ \sum_{v \in K^{[0]}} \alpha(v) = 1 \end{array} \right\}$$

$$d(\alpha, \beta) = \left(\sum_{v \in K^{[0]}} (\alpha(v) - \beta(v))^2 \right)^{1/2}$$

distanza su $|K|$ una metrica su $|K|$ non ha top indotta da d ne quella debole:

- Su ogni $|\sigma|$ per $\sigma \in \mathcal{G}$ mettiamo la topologia indotta da d (chiamo ancora σ il sottocomplesso $\{\tau \subset \sigma\}$)
- Diciamo $\{|\sigma| : \sigma \in \mathcal{G}\}$ è ric. fondamentale.

Prop: Se $K \subset \mathbb{R}^N$ è un c.s. finito sia $\tilde{K}$ l'associato complesso astratto ($\tilde{K}^{[0]} = K^{[0]}$ $\mathcal{G} = \{\sigma^{[0]} : \sigma \in K\}$;

allora $|\tilde{K}| \to |K|$

$$\alpha \longmapsto \sum_{v \in K^{[0]}} \alpha(v) \cdot v$$

è un omeomorfismo —

<u>Dim</u>: l'inversa è data da: se $p \in |K|$, $p \in \mathrm{int}(\sigma)$

e $\sigma = (w_0, \dots, w_m)$ $p = t_0 w_0 + \dots + t_m w_m$ $(t_i > 0)$

$$p \longmapsto \left(v \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } v \notin \{w_0, \dots, w_m\} \\ t_i & \text{se } v = w_i \end{cases} \right)$$ —

Sia in $|K|$ sia in $|\tilde{K}|$ i simplessi sono un ricoprimento chiuso finito e si vede

$$|\tilde{\sigma}| \longrightarrow |\sigma| \quad \text{è un omeo.}$$ $\boxed{\text{K}}$

__Prop:__ $\forall K$ complesso simpliciale, $|K|$ è normale.

__Dim:__ Punti chiusi: ogni $|\sigma| \cong D^n$, in D^n i punti sono chiusi, e $\{|\sigma|\}$ è ric. fond.

Per provare che è T_4 basta vedere che $\forall C \subset |K|$

chiuso e $f : C_1 \to [0,1]$ continua esiste un'estensione continua a $|K|$.

(Basta: se A, B sono chiusi, $A \cap B = \emptyset$ sia $C = A \cup B$ $f : C \to [0,1]$ $f|_A \equiv 0$ $f|_B \equiv 1$; se $F : |K| \to [0,1]$ estende f, $U = F^{-1}([0,1/3))$ $V = F^{-1}((2/3,1])$ separano A, B.)

Basta definire l'estensione di f ricorsivamente su $K^{(n)}$;

per passare da $K^{(n)}$ a $K^{(n+1)}$, tenendo conto che la topologia è quella debole, basta estendere f un simplesso alla volta: abbiamo f già definita su ∂D^n e su un dominio $G \subset D^n$ $\Rightarrow$ l'estensione esiste. $\boxed{\#}$

<u>Prop</u>: Sia K c.s.a.; se $G \subset |K|$ è cpt allora incontra un numero finito di simplessi.

Dim: $\forall \sigma$ t.c. $C_1 \cap \mathrm{int}(\sigma) \neq \emptyset$ scelgo

$p_\sigma \in C_1 \cap \mathrm{int}(\sigma)$; $\mathcal{D}$ = tutti tali p_σ ;

Poiché ogni $|\tau|$ ha numero finito di facce

$\mathcal{D} \cap \tau$ finito $\Rightarrow$ tutti i punti di $\mathcal{D}$ sono aperti

per la top. indotta da $|\tau|$ su $\mathcal{D}$

$\Rightarrow \mathcal{D}$ con top indotta da $|K|$ è discreto

ma $\mathcal{D} \subset C_1$ cpt $\Rightarrow \# \mathcal{D} < +\infty$ ☺

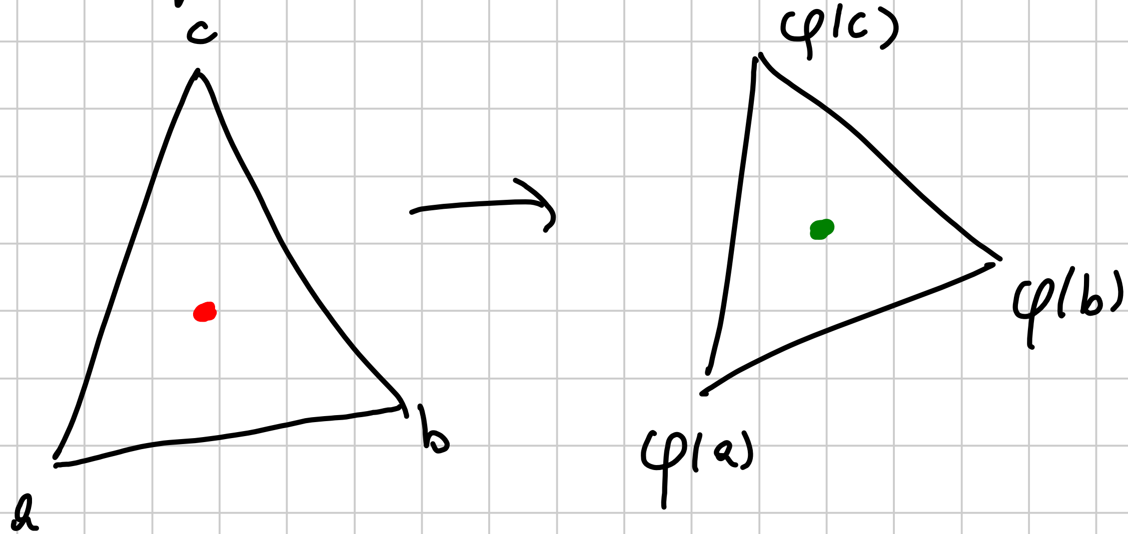
Oss: $|K|$ cpt $\Longleftrightarrow$ K è finito.

Def: $\varphi : K \to H$ è mappa simpliciale se
$\varphi : K^{[0]} \to H^{[0]}$ e $\varphi(\sigma) \in H$ $\forall \sigma \in K$.
Tale φ induce

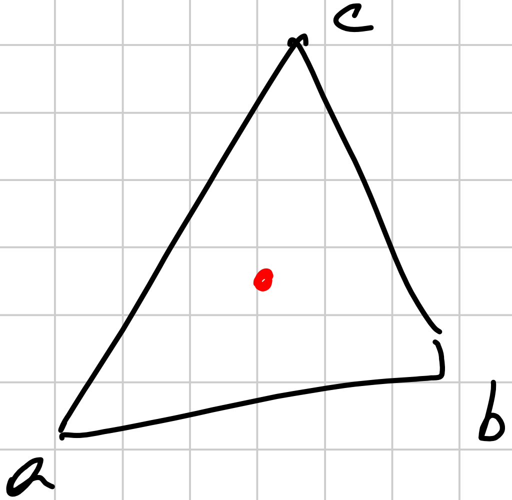
$$|\varphi| : |K| \to |H|$$

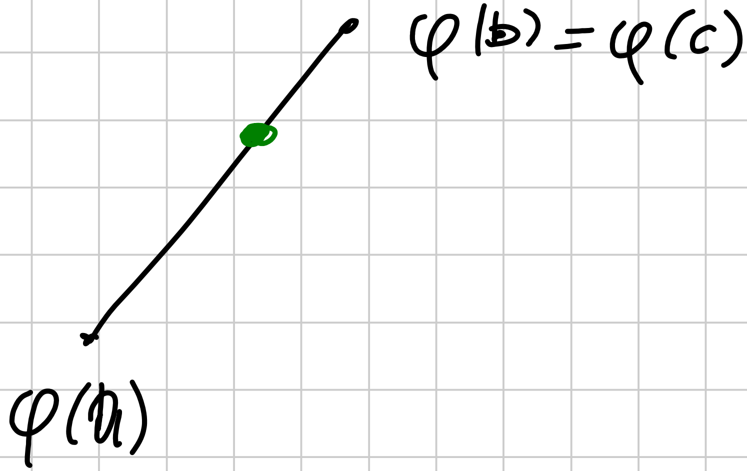
$$(|\varphi| \alpha)(\underset{H^{[0]}}{\underset{\cap}{w}}) = \sum_{\substack{v \in K^{[0]} \\ \varphi(v) = w}} \alpha(v)$$

Per complessi concreti è la solita def:



- $a, b, c \mapsto 1/3$
- $\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c) \mapsto 1/3$





- $a, b, c \longmapsto 1/3$
- $\varphi(a) \mapsto 1/3 \qquad \varphi(b) = \varphi(c) \longmapsto 1/3 + 1/3 = 2/3$

Su ogni $\sigma \in K^{[n]}$ si fissa un ordine $/ \sigma^+_{n+1}$

($n = 0$, scelgo segno $+$)

$C_n(K) = \langle K^{[n]} \rangle$ gruppo abeliano libero generato da $K^{[n]}$

$$\underset{\substack{\Uparrow \\ K^{[n]}}}{\partial_n \sigma} = \sum_{\substack{\tau \in K^{[n-1]} \\ \tau \subset \sigma}}' \varepsilon(\sigma, \tau) \cdot \tau$$

con $\varepsilon(\sigma, \tau)$ così definito:

Scelgo $(v_0, \dots, v_n)$ ordine positivo di σ;

suppongo $\tau = \{ v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \}$

$$\varepsilon(\sigma, \tau) = (-1)^i \cdot \begin{cases} +1 & \text{se } (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n) \text{ è pos per } \tau \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

(Dim algebrica che è ben def: provare che

se $\eta \in S_{n+1}^+$, $i \in \{0, \dots, n\}$

$\beta \in \mathfrak{S}_n$ ottenuta rinumerando con $0, \dots, n-1$

$$\eta(0), \dots, \widehat{\eta(i)}, \dots, \eta(n)$$

$$\Rightarrow (-1)^{\eta(i)-i} \cdot \mathrm{sgn}(\beta) = +1 \,.\,)$$

<u>Esercizio</u>: $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$

$\Rightarrow$ posso definire $H_n(K) = \dfrac{Z_n(K)}{B_n(K)}$.

<u>Ovvio</u>: la def. è quella già vista per K finito.

Oss: per l'escissione bisogna definire un sottocomplesso come una unione disgiunta di simplessi.

—— o ——

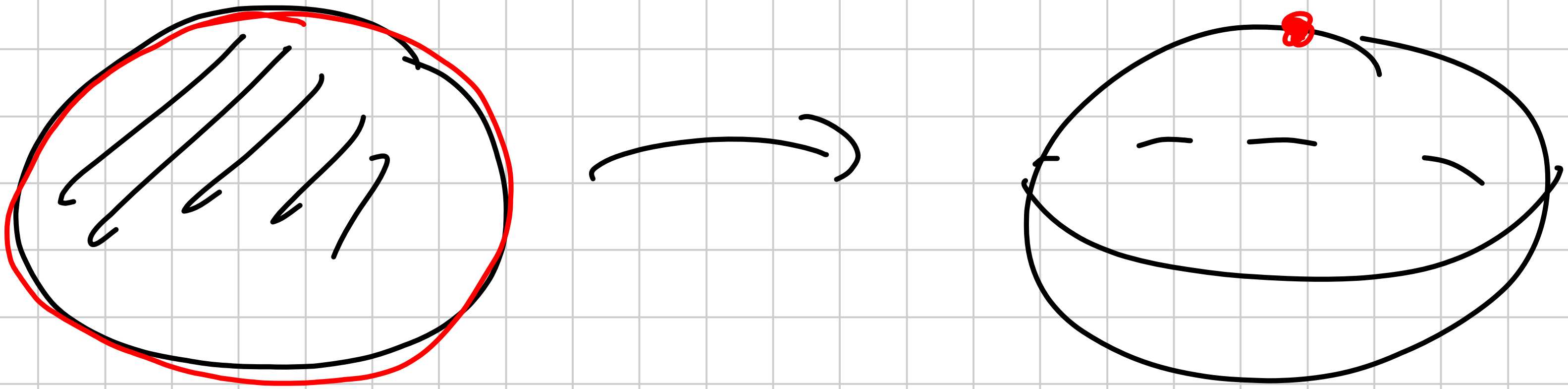
CW complessi e loro omologia.

Def: Attaccamento di una n-cella a spazio X:

$$g: \underset{\partial D^n}{\overset{\parallel}{S^{n-1}}} \longrightarrow X \quad ; \quad X \cup_g D^n = X \sqcup D^n /_{y \sim g(y)}$$

(g può non essere iniettiva) _ Es :

$g : S^{n-1} \longrightarrow \{pt\}$, $\{pt\} \cup_g D^n = D^n / S^{n-1} \cong S^n$



Def: Chiamo CW complesso (complesso cellulare) uno spazio X ricorsivamente ottenuto da $X^{(0)}$ discreto dove $X^{(n)}$ è ottenuto da $X^{(n-1)}$ attaccando n-celle simultaneamente:

$$g_\alpha^{(n)} : S^{n-1} \longrightarrow X^{(n-1)} \qquad \alpha \in A_n \text{ (anche infinito)}$$

$$X^{(n)} = X^{n-1} \bigcup_{\alpha \in A_n} \cup_{g_\alpha^{(n)}} D^n$$

con topologia debole: $\{X^{(n)} : n \geq 0\}$ ricopr. fond.

<u>Oss</u>: Se K è un c.s.f (anche non finito) allora $\overline{|K|}$ ha naturale struttura di CW-complesso

$\forall \sigma \in K^{[n]}$ ho $g_\sigma^{(n)} : \partial D^n \longrightarrow |K^{[n-1]}|$

omeo tra ∂D^n e $\partial \sigma$

(realizzando D^n come Δ_n posso prendere omeo simpliciale.)

<u>Oss</u>: se X è un CW complesso e ogni g_α è simpliciale allora X ha una struttura di complesso simpliciale (suddividere molto).

<u>Oss</u>: $g_\alpha^{(n)} : S^{n-1} \to X^{(n-1)}$ si estende a

$G_\alpha^{(n)} : D^n \to X^{(n)}$ e $G_\alpha^{(n)}\big|_{int(D^n)}$ ovvero sull'immagine.

Omologia cellulare di X CW complesso : $C_n(X) = \langle g_\alpha^{(n)} : \alpha \in A_n \rangle$

gruppo abeliano libero generato dalle n-celle

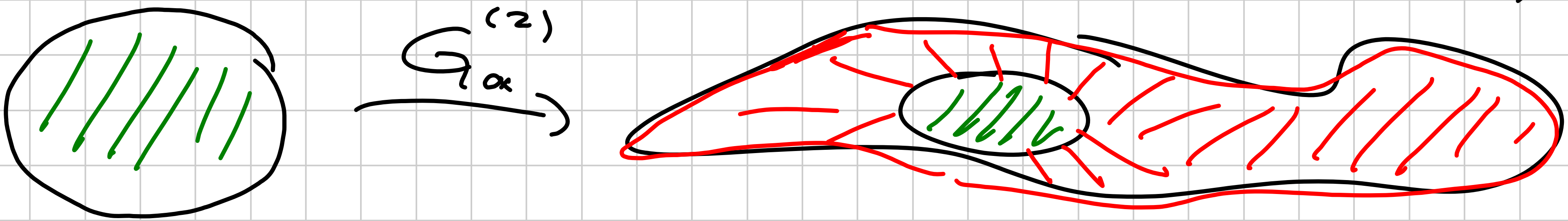
$$\partial_n^{cw} g_\alpha^{(n)} = \sum_{\beta \in A_{n-1}} d\left(g_\alpha^{(n)}, g_\beta^{(n-1)}\right) \cdot g_\beta^{(n-1)}$$

$n = 0 \qquad \partial_0 = 0$

$n = 1 \qquad \partial_1 g^{(1)}_\alpha = + g^{(1)}_\alpha(+1) - g^{(1)}_\alpha(-1)$

$$\left(g^{(1)}_\alpha : \underset{\{\pm 1\}}{\underset{\parallel}{\partial D^1}} \longrightarrow X^{[0]} \right)$$

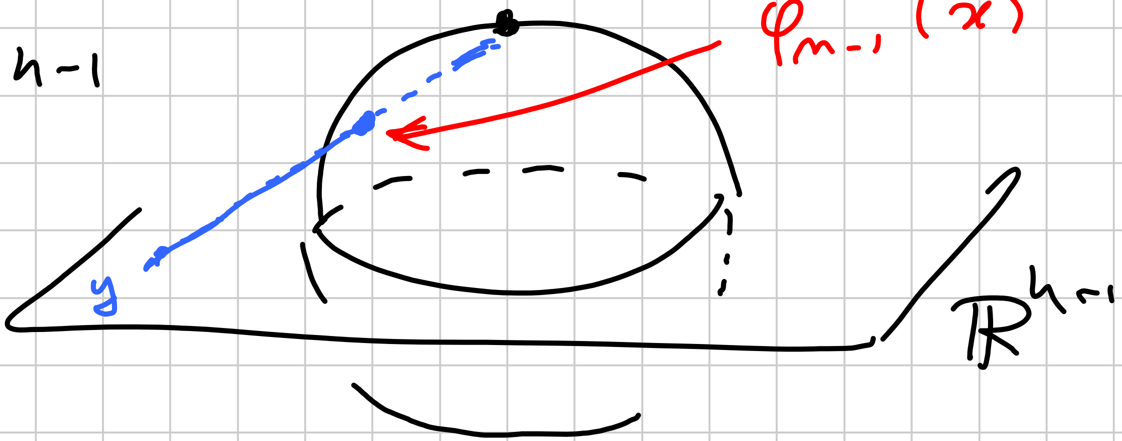
$n > 1$; chiamo $\underline{Y}^{(n-1)}_\alpha = X^{(n-1)} \setminus G^{(n-1)}_\alpha\left(\mathrm{int}\left(D^{n-1}\right)\right)$



Allora
$$\begin{tikzcd} D^{n-1} \arrow[r, "G_\alpha^{(n-1)}"] \arrow[d] & X^{(n-1)} \arrow[d, "\pi_\alpha^{(n-1)}"] \\ D^{n-1}/S^{n-2} \arrow[r, "\tilde{G}_\alpha^{(n-1)}", "\text{omeo}"'] & X^{(n-1)}/Y_\alpha^{(n-1)} \end{tikzcd}$$

Inoltre ho omeo naturale
$$D^{n-1}/S^{n-2} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} S^{n-1}$$

$$D^{n-1} \ni x \longmapsto y = \frac{x}{1-\|x\|} \in \mathbb{R}^{n-1}$$



Allora pongo:

$$d\left(g_\beta^{(m)}, g_\alpha^{(m-1)}\right) = \deg\left(S^{n-1} \xrightarrow{g_\beta^{(m)}} X^{(m-1)} \xrightarrow{\pi_\alpha^{(n-1)}} X^{(n-1)} / Y_\alpha^{(n-1)} \xrightarrow{\left(\tilde{G}_\alpha^{(n-1)}\right)^{-1}} D^{n-1}/S^{n-2} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} S^{n-1} \right)$$

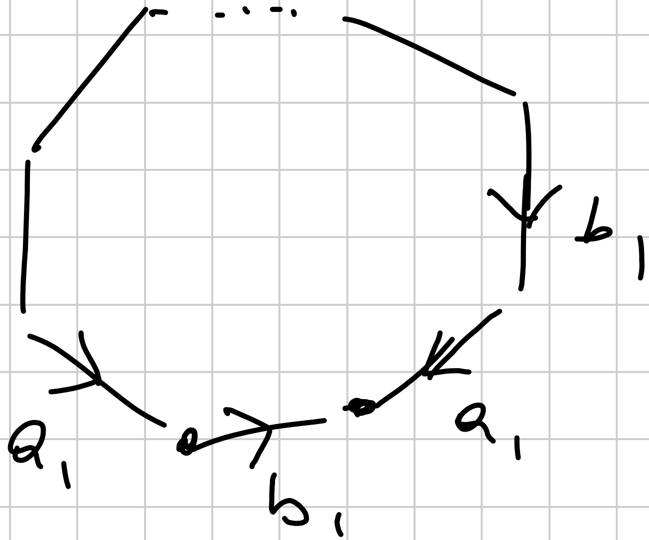
uso il fatto che
H_{n-1} è già def fin

S^{m-1} e vale $\mathbb{Z}$

Teo: $\partial^{cw}_{m-1} \circ \partial^{cw}_{m} = 0$ _

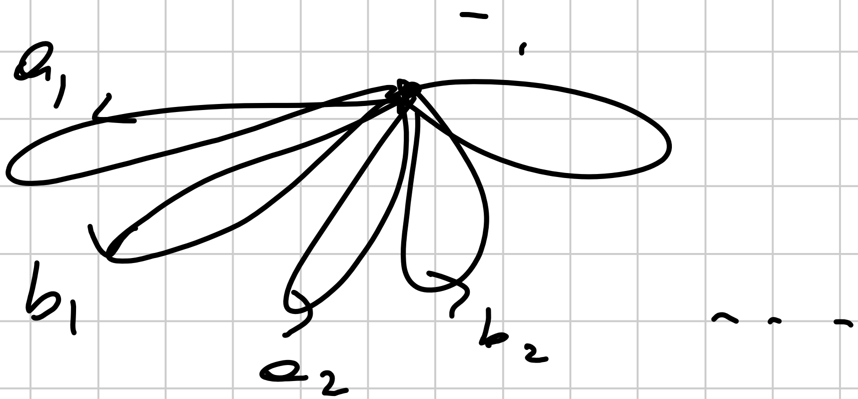
$\Rightarrow$ è definito $H^{cw}_{m}(X)$ _

Esempi: Σ, superficie $\Rightarrow H_2(\Sigma) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{orient} \\ 0 & \text{non-ori} \end{cases}$

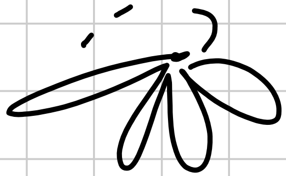
$\Sigma =$ 

$\Longrightarrow \Sigma$ ha struttura di CW-complesso con 1 0-cella (il vertice)

$2g$ 1-celle



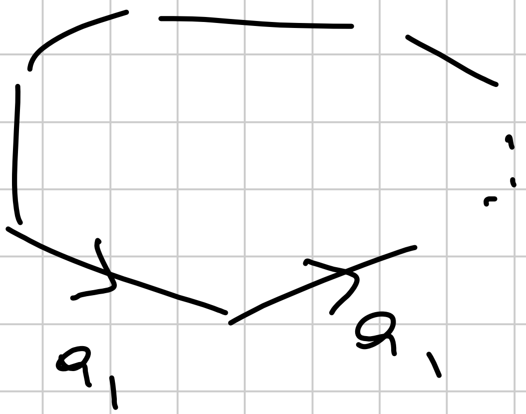
1 2-celle con funzione di attaccamento

$g^{(2)} : \partial D^2 \longrightarrow$ 

data da $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots$

$d(g^{(2)}, a_j) = +1 - 1 = 0 \Rightarrow \partial g^{(2)} = 0$

$d(g^{(2)}, b_j) = +1 - 1 = 0 \Rightarrow H_2 = \mathbb{Z}$

$\Sigma =$ 

1 0-cella

g 1-celle

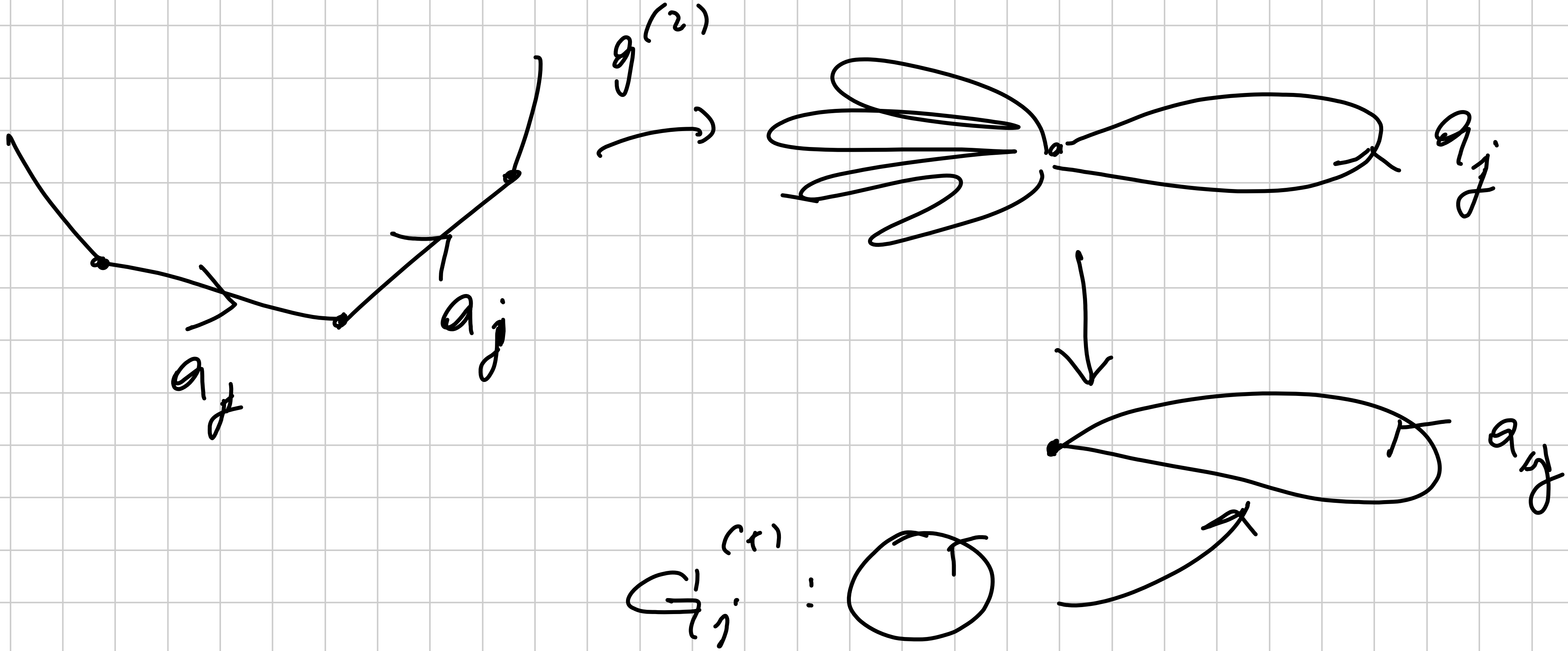
1 2-celle

$$g^{(2)} : \partial D^1 \longrightarrow (\text{bouquet})$$

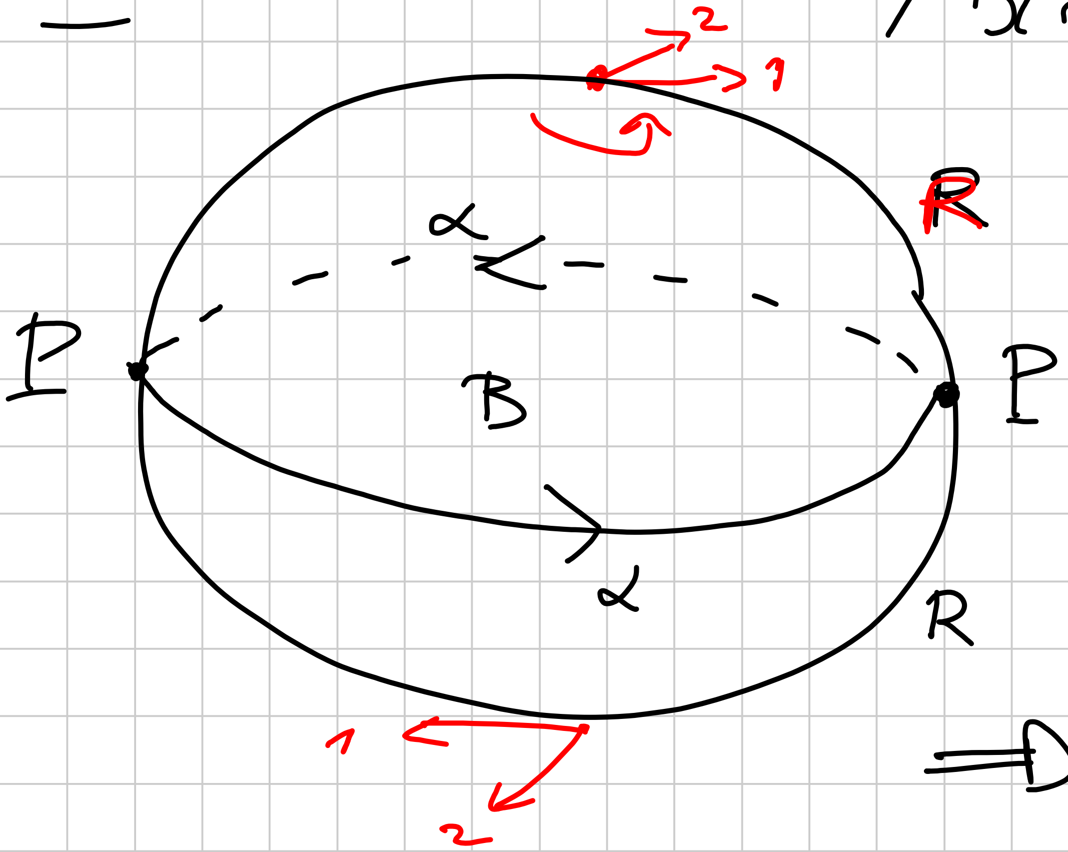
$$a_1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_2 \; a_3 \; a_3 \cdots$$

$$d(g^{(2)}, a_j) = +1 + 1 = 2$$

$$\partial_2 g^{(2)} = 2a_1 + \cdots + 2a_g \Rightarrow H_2 \cong 0$$



$\underline{Es}$: $\mathbb{RP}^3 = D^3/_{x\sim -x}$



$\partial_0 P = 0$

$\partial_1 \alpha = P - P = 0$

$\partial_2 R = \alpha + \alpha = 2\alpha$

$\partial_3 B = R - R = 0$

$\Rightarrow H_0 = \mathbb{Z} \quad H_1 = \mathbb{Z}/2$

$H_2 = 0 \quad H_3 = \mathbb{Z}$

Es: $H_n(S^m)$ — una 0-cella, una m-cella e basta!

$$\Rightarrow H_n(S^m) = \begin{cases} 0 & \text{per } m \neq n > 0 \\ \mathbb{Z} & \text{per } m = n > 0 \end{cases}$$

(imbroglio: $H_n(S^n)$ usato per definire H^{CW}) –