ETA 17/10/13

<u>Thm</u>: $g_0, g_1 : |K| \to |L|$
M_0, M_1 sudd. di K, $g_0 : M \to L$, $g_1 : M \to L$
simpliciali; $g_0 \simeq g_1$ (omotopo via funz. cont.)

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} & H_n(M_0) \arrow[dr, "g_{0*}"] & \\ H_n(K) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[dr, "\cong"'] & & H_n(L) \\ & H_n(M_1) \arrow[ur, "g_{1*}"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

(Se $g_0 \simeq g_1$ allora $g_{0*} = g_{1*}$ modulo gli isomorfismi canonici.)

<u>Cor</u>: $f : |K| \to |L|$ continua allora è ben def $f_* : H_n(|K|) \to H_n(|L|)$ come $f_* = g_*$ con g approx simpl. di f.

<u>Cor</u>: $f_0, f_1 : |K| \to |L|$ continue, $f_0 \simeq f_1$
$\Longrightarrow \quad f_{0*} = f_{1*} : H_n(|K|) \to H_n(|L|)$.

<u>Oss</u>: $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$

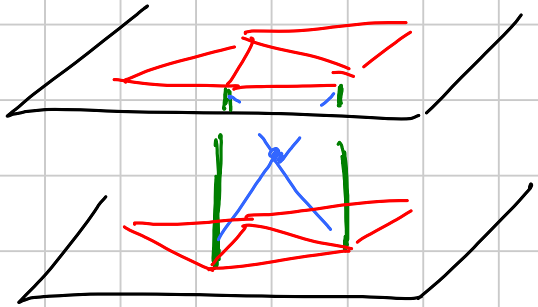
Cor: $H_n(|K|)$ dipende/isomorfismo solo dal tipo di omotopia di $|K|$.

(X e Y hanno stesso tipo di omotopia se esistono $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$ $g \circ f \simeq id_X$, $f \circ g \simeq id_Y$).

In particolare $H_n(|K|)$ dipende solo dal tipo di omeomorfismo di $|K|$.

Oss: ci sono altre teorie omologiche (equivalenti) in cui ciò è immediato.

Dimo (teo): $g_0 : M_0 \to L$, $g_1 : M_1 \to L$ simpliciali con M_0, M_1 sudd. di K; $G : |K| \times [0,1] \to |L|$ cont. con $G(\cdot, j) = g_j$. Prendo M suddivisione di M_0 e M_1 e estendo $M \times \{0,1\}$ a una triang. di $|K| \times [0,1]$:



- 0-simplessi: solo quelli di $M \times \{0,1\}$
- 1-simplessi: aggiungo $K^{[0]} \times [0,1]$
- Induttivamente: per $\sigma \in M$ triangolo $\sigma \times [0,1]$ ad es.

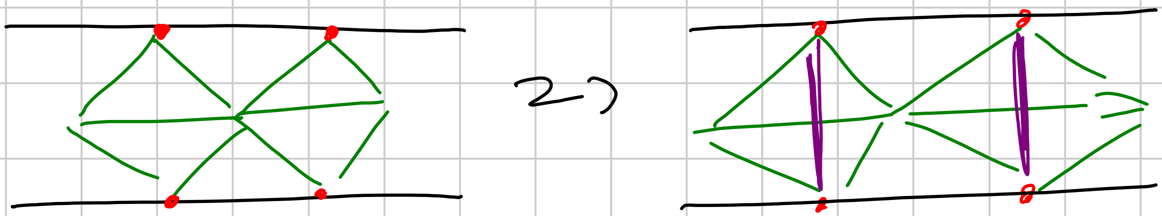
facendo il cono del centro
sul bordo

Prendo $F : |K| \times [0,1] \longrightarrow |L|$ approx. simpl. di G, simpliciale rispetto a N triang. di $|K| \times [0,1]$.
Wlog: posso supporre che su $|K| \times \{0\}$ e $|K| \times \{1\}$ la N induca la stessa triangolazione $\underline{P}$ di $|K|$. Tale $\underline{P}$ suddivide M_0 e M_1 e $f_j = F(\cdot, j)$ si ottiene da g_j come nel Lemma ultimo del 15/10:

$$f_j(v) \in g_j(\sigma)^{(0)} \text{ se } v \in \mathrm{int}(\sigma), \; \sigma \in M_j,$$

dunque
$$\begin{tikzcd} H_n(M_i) \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "g_{i*}"'] & H_n(P) \arrow[d, "f_{i*}"] \\ & H_n(L) \end{tikzcd}$$
commute.

Wlog: $\forall \sigma \in P$, $\sigma \times [0,1]$ sia sottocomplesso di N



Se $z \in C_z(P)$ ha senso $z \times [0,1]$

$$\left(z = \sum n_\sigma \cdot \sigma \quad \Longrightarrow \quad z \times [0,1] = \sum n_\sigma \cdot (\underbrace{\sigma \times [0,1]}_{}) \right)$$

(Esprimo come somma di simplessi n-dim di N con orientaz. ovvia)

Ora se $z \in Z_n(P)$

$$\partial(z \times [0,1]) = \underbrace{(\partial z)}_{=\,0} \times [0,1] + z \times \underbrace{\partial[0,1]}_{\{1\} - \{0\}}$$

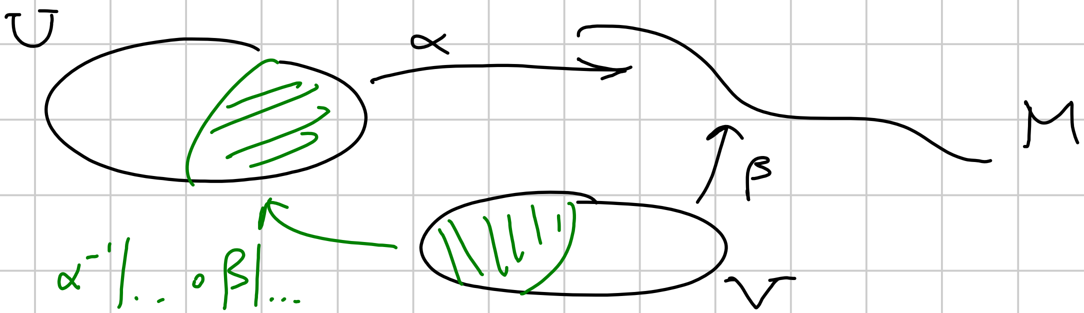
$$\Rightarrow \partial^{L}_{n+1} \underbrace{F(z \times [0,1])}_{\in\, C_{n+1}(L)} = \underset{\substack{\| \\ f_{1*}(z)}}{F(z \times 1)} - \underset{\substack{\| \\ f_{0*}(z)}}{F(z \times 0)}$$

$\Rightarrow f_{0*} = f_{1*} : H_n(P) \to H_n(L)$. Ora:

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(M_0) \arrow[dr, "\cong"] \arrow[rr, bend left, "g_{0*}"] & & H_n(L) \arrow[dd, equal] \\
H_n(K) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[dr, "\cong"'] & & H_n(P) \arrow[ur, "f_{0*}"'] \arrow[dr, "f_{1*}"] & \\
 & H_n(M_1) \arrow[ur, "\cong"'] \arrow[rr, bend right, "g_{1*}"'] & & H_n(L)
\end{tikzcd}$$

$\blacksquare$

Def: M si dice n-varietà differenziabile se è T_2 paracompatto e ha un atlante, cioè una collezione di carte le cui immagini coprono M, dove una carta è
$$\alpha : U \xrightarrow[\text{omeo}]{} \alpha(U) \text{ aperto di } M \text{ con } U \subset \mathbb{R}^n \text{ aperto}$$
e i cambiamenti di carte sono C^∞;



(Fatto: si prende atlante massimale wrt inclusione)

<u>Def</u>: $M \subset \mathbb{R}^k$ è una n-sottovarietà se le carte $\alpha : U \to \alpha(U) \subset M$ questo sono differenziabili con $\operatorname{rank}(d\alpha) \equiv n$.

<u>Oss</u>: $M \subset \mathbb{R}^k$ n-sottovar $\iff$ loc. grafico di $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{k-n}$ differenziabile.

<u>Oss</u>: Per $M \subset \mathbb{R}^k$ n-sottovar, $p \in M$ è definito in modo naturale lo spazio tangente T_pM

come $(d_{\alpha^{-1}(p)}\alpha)(\mathbb{R}^n)$ dove $\alpha : U \to M$ è carta con $p \in \alpha(U)$

Idea: i vettori tangenti sono quelli nelle cui direzioni posso derivare le funzioni definite su M:

Def: M varietà; $f: M \to \mathbb{R}$ è differenziabile se $f \circ \alpha$ lo è per ogni carta.

Def: Se M è varietà astratta e $p \in M$ chiamo spazio tangente a p in M

$$T_p M = \left\{ v : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \ : \ v \text{ lineare e } v(f \cdot g) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g) \ \forall f, g \right\}$$

Esercizio. se $\alpha : U \to M$ è carta, $p \in \alpha(U)$

$$\mathbb{R}^n \ni w \longmapsto \left(f \longmapsto \frac{\partial}{\partial w}(f \circ \alpha)\Big|_{\alpha^{-1}(p)} \right) \in T_pM$$

è un isomorfismo.

Def: $g : M \to N$ è differenziabile se
$\beta^{-1}|_{\dots} \circ g|_{\dots} \circ \alpha$ è diff $\forall$ α carte di M
β carta di N

Def $d_p g : T_pM \to T_{g(p)} N$

$((d_p g)(v))(f) = v(f \circ g)$.

(Estende $M \subset \mathbb{R}^k$, $N \subset \mathbb{R}^n$).

Def: Se $g: M \to N$

$p \in M$ è regolare se $d_p g$ è surgettivo

$q \in N$ è regolare se ogni $p \in g^{-1}(q)$ è regolare

———— o ————

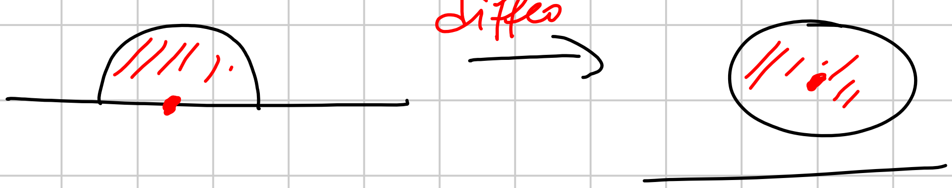
Def: M è m-var. diff. con bordo se ...

stesse def. con carte $\alpha: U \to M$ dove

U è aperto di $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)$.

Oss: Se $p \in M$, $p \in \alpha(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ per qualche carta α allora per ogni altra β si ha $p \in \beta(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$. Infatti

$\nexists$



dunque posso definire

$\partial M = \{p : p \in \alpha(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\}$

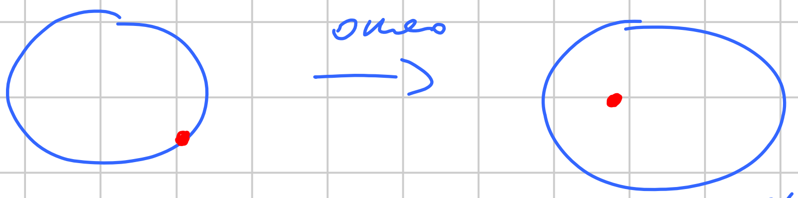
ed è $(n-1)$-var. senza bordo.

<u>Oss:</u> topologicamente

$\nexists$

OK connessione

$\nexists$



OK per π_1

in dim. ≥ 3 resta vero ma serve l'omologia.

Def: M varietà diff. è orientata se dotata di un atlante in cui tutti i cambi di carta $\beta|_{\dots}^{-1} \circ \alpha|_{\dots}$ hanno det del differenziale > 0.

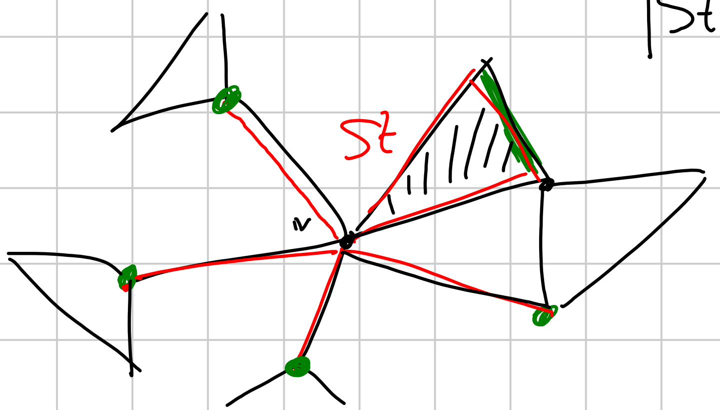
Varietà PL (piecewise linear).

K complesso simpliciale

$St(v, K) = \{\sigma \in K : v \in \sigma\}$ $\quad v \in K^{[0]}$

$\overset{\circ}{St}(v, K) = \bigcup \{int(\sigma) : \sigma \in K, v \in \sigma\}$

$Lk(v, K) = \{\tau \in K : v \notin \tau, \exists \sigma \in K \text{ t.c. } \sigma \supset \tau, \sigma \ni v\}$



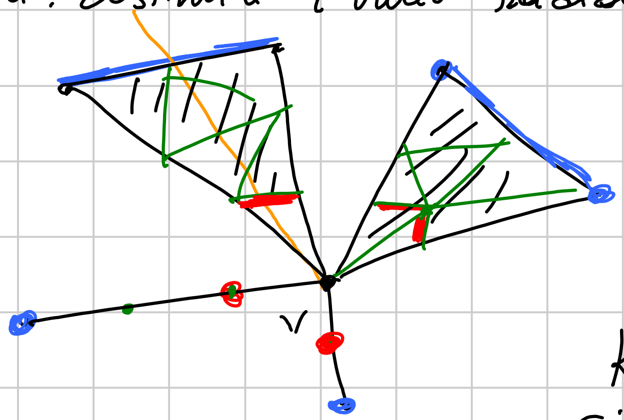
$$|St(v)| = \mathring{St}(v) \sqcup |Lk(v)|$$

$$St(v) = Con(v, Lk(v))$$

Def: K, L complessi simpliciali sono PL-omeo se esistono suddivisioni K' e L e un omeo simpliciale $K' \longrightarrow L'$.

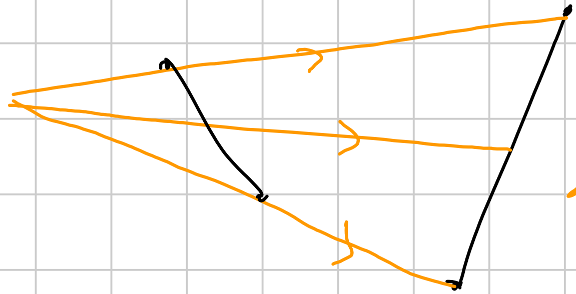
Fatto: $Lk(v,K) \underset{PL}{\cong} Lk(v,H)$ se H suddivide K e $v \in K^{[0]}$.

Idea: costruire l'omeo radialmente



(in realtà: costruire così l'omeo sui vertici di $Lk(v,H)$ suddividendo K e poi estendere simplicialmente.)

Es.



non è simpliciale

Cor: se K è complesso simpliciale e $p \in |K|$ sono ben def / ovvero PL $St(p,K)$, $Lk(p,K)$ come $St(p,H)$, $Lk(p,H)$ dove H suddivide K e $p \in H^{[0]}$. (Passare a suddivisione comune per Lk; usare Lk per St.)

Def: K complesso simpliciale è varietà PL senza bordo se vale uno dei fatti equiv:

(1) $Lk(v,K) \cong_{PL} \partial\Delta_n \quad \forall v \in K^{[0]}$

$(\Delta_n = Con(e_0,\dots,e_n) \in \mathbb{R}^{n+1})$

(2) $Lk(p,K) \cong_{PL} \partial\Delta_n \quad \forall p \in |K|$

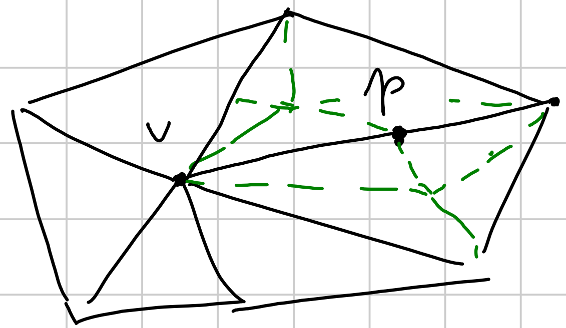
(3) $St(v,K) \cong_{PL} \Delta_n$ con $v \longleftrightarrow x \in int(\Delta_n) \quad \forall v \in K^{[0]}$

(4) $St(p,K) \cong_{PL} \Delta_n$ con $p \leftrightarrow x \in int(\Delta_n) \quad \forall p \in |K|$.

Dimo equiv: $(4) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3)$ ovvie

$(3) \Rightarrow (4)$

Sia $p \in |K|$; $p \in \mathrm{int}(\sigma)$, $\sigma \in K$. Prendo $v \in \sigma^{[0]}$



$(n=2)$

(finire per esercizio)