ETA 15/10/13

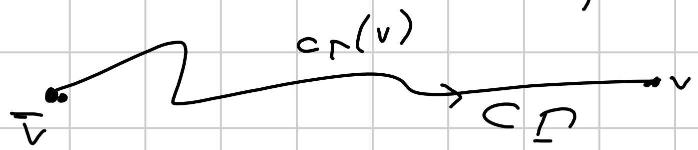
$T \subset K^{(1)}$ albero max ; $\mathcal{G} = K^{[1]} \setminus T^{[1]}$

$$\Rightarrow H_1(K) = \frac{\mathbb{Z}^{\mathcal{G}}}{\langle \partial^{\mathcal{G}} T : T \in K^{[2]} \rangle}$$

$\mathbb{Z}^{\mathcal{G}} = Ab(\mathbb{Z}^{*\mathcal{G}})$; $\partial^{\mathcal{G}} T =$ orienta T e cancella da ∂T i lati in T

$(\partial^{\mathcal{G}} T = Ab(w_T))$. $(\Rightarrow H_1 = \pi_1 / [\pi_1, \pi_1])$.

Dimo: $\alpha(e) = c_\Gamma(v_0(e)) \cdot e \cdot c_\Gamma(v_1(e))$, $\quad e \in \mathcal{G}$



Provo che $Z_1(K) = \langle Ab(\alpha(e)) \ : \ e \in \mathcal{G} \rangle \cong \mathbb{Z}^{I}$;

visto: ogni ciclo è abelianizzato di un prodotto di lacci $\Rightarrow$ ab. prod. di lacci in $\bar{v}$

$\Rightarrow$ ab. prod. di lacci $\alpha(e)$

(ovvio: $\partial_1 \alpha(e) = 0 \ \forall e$).

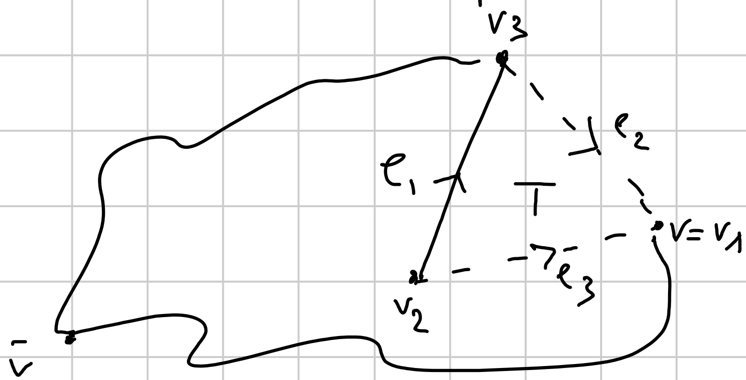
E' biiezione: in $\sum_{e \in \mathcal{G}} Ab(\alpha(e)) \cdot m_e$, e ha coeff m_e.

Devo provare che, sotto la corrispondenza

$$Ab(\alpha(e)) \longleftrightarrow e$$

∂T corrisponde a $\partial^S T$. Come per il π_1!

Un caso come esempio:



$$\partial^S T = e_2 - e_3$$

$$w_T = e_3^{-1} \cdot e_2$$

sotto la corrispond.

$$w_T \leftrightarrow \underbrace{c_T(v_1)\, e_3^{-1} \cdot \underset{\substack{\| \\ e_1 \cdot c_T(v_3)}}{c_T(v_2)}^{-1}}_{\alpha(e_3)^{-1}} \cdot \underbrace{c_T(v_3) \cdot e_2 \cdot c_T(v_1)^{-1}}_{\alpha(e_2)}$$

$$\mathrm{Ab}(\hat{T}) = -e_3 + e_1 + e_2 = \partial T. \qquad \blacksquare$$

<u>Def</u>: K, L complessi simpliciali

$g : |K| \to |L|$ è simpliciale se

- $g(K^{[0]}) \subset L^{[0]}$ e
- $(v_0, \dots, v_n) \in K \Rightarrow (g(v_0), \dots, g(v_n)) \in L$

- $g\left(\sum t_i v_i\right) = \sum t_i\, g(v_i)$.

<u>Oss</u>: g è determinata da $g_0 = g|_{K^{[0]}} : K^{[0]} \to L^{[0]}$;

e data $g_0 : K^{[0]} \to L^{[0]}$ essa si estende a una g simpliciale $\iff g_0(\sigma^{[0]}) = \tau^{[0]}$ per qualche $\tau \in L$ $\forall \sigma \in K$

e in tal caso l'estensione è unica.

Data $g : K \to L$ simpliciale e $\sigma \in K^{[n]}$ pongo

$$g_{*_n}(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{se } g(\sigma) \notin L^{[n]} \\ \delta(\sigma) \cdot g(\sigma) & \text{se } g(\sigma) \in L^{[n]} \end{cases}$$

$\delta(\sigma) = \pm 1$ dice se $g|_\sigma : \sigma \to g(\sigma)$

rispetta o no le orientazioni fissate

Estendo a $g_{*_n} : C_n(K) \longrightarrow C_n(L)$

$$C_n(K) = \mathbb{Z}^{K^{[n]}} \qquad C_n(L) = \mathbb{Z}^{L^{[n]}}$$

Prop: $g_* : C(K) \longrightarrow C(L)$ è una mappa di complessi di catene, cioè

$$\begin{tikzcd}
C_n(K) \arrow[r, "\partial_n^K"] \arrow[d, "g_{*_n}"] & C_{n-1}(K) \arrow[d, "g_{*_{n-1}}"] \\
C_n(L) \arrow[r, "\partial_n^L"] & C_{n-1}(L)
\end{tikzcd}$$

$g_{*_{n-1}} \partial_n^K = \partial_n^L g_{*_n}$ — Lo verifico su ogni $\sigma \in K^{[n]}$.

Tre casi: (1) $g(\sigma) \in L^{[n]}$

(2) $g(\sigma) \in L^{[n-1]}$

(3) $g(\sigma) \in L^{(n-2)}$

(3) $g(\tau) \notin L^{[n-1]} \quad \forall \tau \subset \sigma, \tau \in K^{[n-1]}$

$\Longrightarrow g_{*_n}(\sigma) = 0$ e $g_{*_{n-1}}(\partial \sigma) = 0$

(1) $g_{*_{n-1}}(\partial_n^K \sigma) = g_{*_{n-1}}\left(\sum_{\substack{\tau \in K^{[n-1]} \\ \tau \subset \sigma}} \varepsilon(\sigma,\tau) \cdot \tau \right)$

$$= \sum_{\tau \in K^{[n-1]}, \tau \subset \sigma} \underbrace{\varepsilon(\sigma,\tau) \cdot \delta(\tau)}_{} \cdot g(\tau)$$

$$\partial_m^L(g_{*_m}\sigma) = \partial_m^L\big(\delta(\sigma)\cdot g(\sigma)\big) =$$

$$= \sum_{\eta\in L^{[m-1]},\, \eta\subset g(\sigma)} \delta(\sigma)\cdot\varepsilon(g(\sigma),\eta)\cdot\eta$$

$$= \sum_{\tau\in K^{[m-1]},\, \tau\subset\sigma} \delta(\sigma)\cdot \underbrace{\varepsilon(g(\sigma),g(\tau))}\cdot g(\tau).$$

uguali: $\varepsilon(g(\sigma),g(\tau)) =$
$= \varepsilon(\sigma,\tau)\cdot\delta(\sigma)\cdot\delta(\tau)$

(2) $g(\sigma)\in L^{[m-1]}$ $\qquad g_{*_m}\sigma = 0$

$\Rightarrow$ devo vedere che $g_{*_{m-1}}(\partial_m^K\sigma) = 0$.

Wlog: $\sigma=(v_0,v_1,\dots,v_m)$ $\qquad (w_1,\dots,w_m)=g(\sigma)$

$g(v_0)=g(v_1)=w_1 \qquad g(v_j)=w_j \quad j=2\dots m$

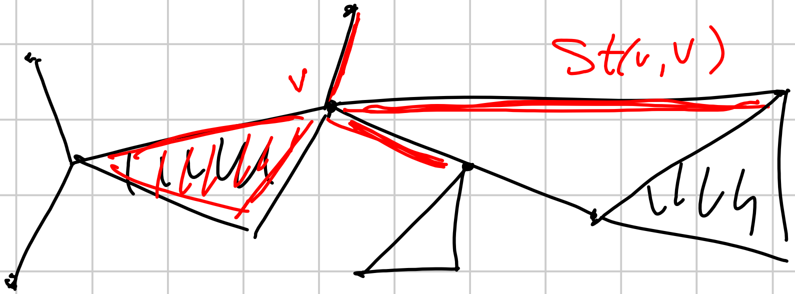
$$
\begin{aligned}
\partial_n^K \sigma = {} & (v_1, v_2, \dots, v_n) & & & (w_1, w_2, \dots, w_n) \\
& - (v_0, v_2, \dots, v_n) & \xrightarrow{g_{*n-1}} & & - (w_1, w_2, \dots, w_n) \\
& + (v_0, v_1, v_3, \dots, v_n) & & & 0 \\
& - (v_0, v_1, v_2, v_4, \dots, v_n) & & & \vdots \\
& \vdots & & & 0 \\
\hline
& & & & 0
\end{aligned}
$$

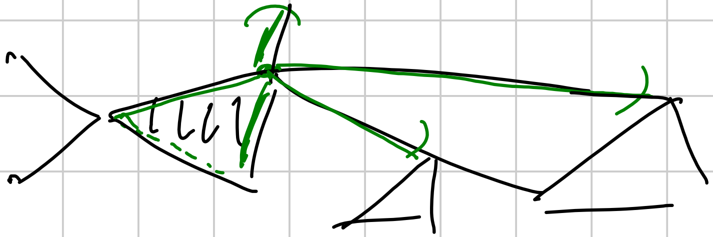
Cor: g induce $g_{*n} : H_n(K) \to H_n(L)$.

Def: K complesso simpliciale, $v \in K^{[0]}$

$$St(v, K) = \{ \sigma \in K : v \in \sigma^{[0]} \}$$

$$\mathring{S}t(v,K) = \bigcup \{ \operatorname{int}(\sigma) \ ; \ \sigma \in K,\ v \in \sigma^{[0]} \}$$





<u>Oss</u>: $\mathring{S}t(v,K) \cap \tau$ è aperto in τ $\forall \tau \in K$

$\Longrightarrow \mathring{S}t(v,K)$ aperto in $|K|$.

Lem: $v_1, \dots, v_k \in K^{[0]}$

$$\bigcap_{j=1}^{k} \mathring{S}t(v_j, K) \neq \emptyset \Longleftrightarrow (v_1, \dots, v_k) \in K$$

Dim: $\Longrightarrow$ Sia $x \in \bigcap \mathring{S}t(v_j, K)$; esiste (!) $\sigma \in K$ t.c. $x \in \mathrm{int}(\sigma)$

$\Longrightarrow \mathring{S}t(v_j, K) \subset \mathrm{int}(\sigma) \Longrightarrow v_j$ vertice di σ

$\Longrightarrow (v_1, \dots, v_k)$ faccia di $\sigma \Longrightarrow \in K$

$\Longleftarrow$ Stesso argomento: $x \in \mathrm{int}(v_1, \dots, v_k)$

allora $x \in \bigcap_{j=1}^{k} \mathring{S}t(v_j, K)$.

$\boxtimes$

Teo (di approx. simpliciale): K, L c.s. $f: |K| \to |L|$ continua; allora $\exists H$ suddivisione di K e $g: H \to L$ simpliciale t.c. $\forall x \in |K|$ esiste un simplesso di L che contiene sia $f(x)$ sia $g(x)$.

Cor 1: date $f: |K| \to |L|$ continua esiste H sudd. di K e $g: H \to L$ simpliciale con $g \simeq f$ (omotope).

Dim: g come nel Teo; $F(t,x) = \underbrace{t \cdot f(x) + (1-t) \cdot g(x)}$

ha senso perché
$f(x), g(x) \in \tau \in L$.

$\boxtimes$

Cor2: data $f : |K| \to |L|$ continua e $\varepsilon > 0$ esistono sudd. H di K e M di L, $g : H \to M$ simpliciale con $g \simeq f$ e $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$.

Dim: Suddivido L in una M con
$\max(\operatorname{diam}(\tau) : \tau \in M) < \varepsilon$.

Ora applico il Teo: $f(x), g(x) \in \tau \in L \quad \forall x \in |K|$

$\Longrightarrow |f(x) - g(a)| < \varepsilon \Longrightarrow \|f - g\|_\infty < \varepsilon.$ $\boxtimes$

Dim (Teo): $\{\mathring{S}t(w, L) : w \in L^{[0]}\}$ è ric. ap. di $|L|$

$\Longrightarrow \{f^{-1}(\mathring{S}t(w, L)) : w \in L^{[0]}\}$ è r. a. di $|K|$.

Sia ε un numero di Lebesgue per lui;

prendo H suddivisione di K con $\max \operatorname{diam}(H) < \varepsilon/2$.

Dato $v \in H^{[0]}$ scelgo $g(v) \in L^{[0]}$ t.c.

$$B(v, \varepsilon/2) \subset f^{-1}(\mathring{S}t(g(v), L))$$

$\Longrightarrow \forall \sigma \in H$, con $v \in H$ ho $\sigma \subset f^{-1}(\mathring{S}t(g(v), L))$

$\Longrightarrow \mathring{S}t(v, H) \subset f^{-1}(\mathring{S}t(g(v), L))$.

Affermo: (1) g si estende a $g: H \to L$

(2) $\forall x \in |K| \ \exists \tau \in L$ t.c. $f(x), g(x) \in \tau$.

(1) Devo provare che $(v_1, \dots, v_k) \in H \Rightarrow (g(v_1), \dots, g(v_k)) \in L$;

sia $x \in \mathrm{int}(v_1, \dots, v_k)$

$$\Rightarrow x \in \bigcap \mathring{S}t(v_j, H) \subset \bigcap f^{-1}\left(\mathring{S}t(g(v_j), L)\right)$$

$$= f^{-1}\left(\bigcap \mathring{S}t(g(v_j), L)\right)$$

$$\Rightarrow \bigcap \mathring{S}t(g(v_j), L) \neq \emptyset \Rightarrow (g(v_1), \dots, g(v_k)) \in L.$$

(2) Sia $(v_1, \dots, v_k) \in H$ t.c. $x \in \mathrm{int}(v_1, \dots, v_k)$

Le stesse formule provano che $f(x) \in \text{int}(g(v_1), \dots, g(v_k))$ ma anche $g(x) \in \text{int}(g(v_1), \dots, g(v_k))$:
pongo $\tau = (g(v_1), \dots, g(v_k))$. $\boxtimes$

Versione relativa:

<u>Teo</u>: $M \subset K$, $N \subset L$, $f: |K| \to |L|$ continua
$f(|M|) \subset |N|$.
Allora esiste H suddivisione di K e $g: H \to L$ simpliciale t.c. $g(|M|) \subset |N|$,
se $x \in |M|$ esiste $\tau \in N$ t.c. $f(x), g(x) \in \tau$

Se $x \in |K|$ esiste $\tau \in L$ t.c. $f(x), g(x) \in \tau$.

<u>Dimo</u>: Si procede allo stesso modo con ε di Lebesgue per

$$\left\{ f^{-1}\left(\mathring{S}t(w, L) \right) : w \in L^{[0]} \right\} \text{ e }$$

$$\left\{ f|_{|M|}^{-1} \left(\mathring{S}t(w, N) \right) : w \in N^{[0]} \right\}.$$

Si sceglie $g(r)$ come prima badando che

$g(v) \in N^{[0]}$ per $v \in H^{[0]} \cap |M|$. E poi uguale. $\square$

Teo: Sia $f : |K| \to |L|$ continua e $g : H \to L$ simpliciale con H sudd. di K e $g \simeq f$. Allora è ben definita $f_* : H_*(K) \to H_*(L)$ come

$$\begin{tikzcd}
H_*(H) \arrow[r, "g_*"] & H_*(L) \\
H_*(K) \arrow[u, "\text{isomorfismo canonico}"] \arrow[ur, dashed, "f_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Segue dal fatto che se

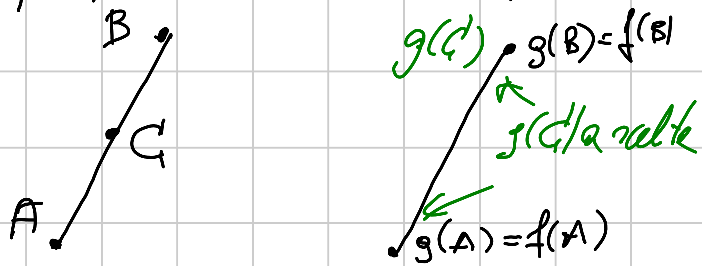
$$g_1 : H_1 \longrightarrow L \qquad g_2 : H_2 \longrightarrow L$$

sono omotope tramite funzioni continue allora a meno degli isomorfismi canonici $g_{1*} = g_{2*}$, cioè

$$\begin{tikzcd}
 & H_*(H_1) \arrow[dr, "g_{1*}"] & \\
H_*(K) \arrow[ur] \arrow[dr] & & H_*(L). \\
 & H_*(H_2) \arrow[ur, "g_{2*}"'] &
\end{tikzcd}$$

Lem: Sia $g : K \to L$ simpliciale

Sia M una suddivisione di K. Sia $f : M \to L$ simpliciale con $f(v) \in f(\sigma)^{[0]}$ se $v \in \mathrm{int}(\sigma)$.



Allora:

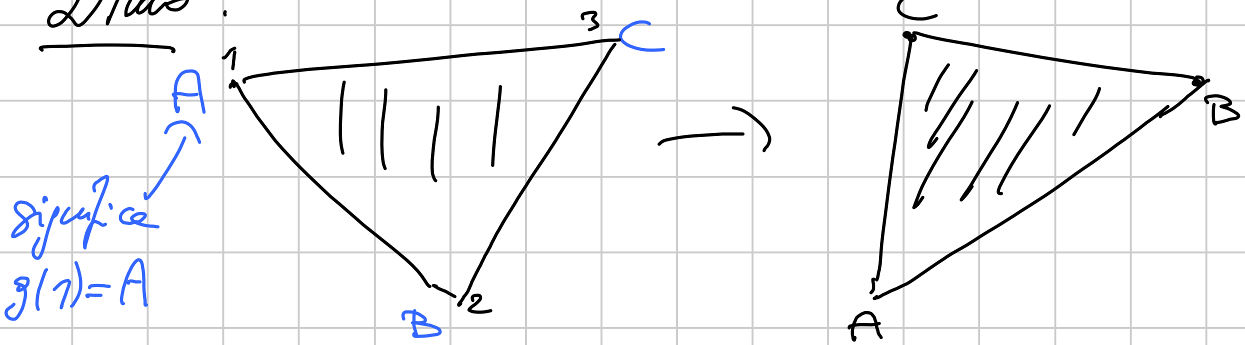
$$\begin{tikzcd} C_n(K) \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "g_{*n}"'] & C_n(M) \arrow[d, "f_{*n}"] \\ & C_n(L) \end{tikzcd}$$

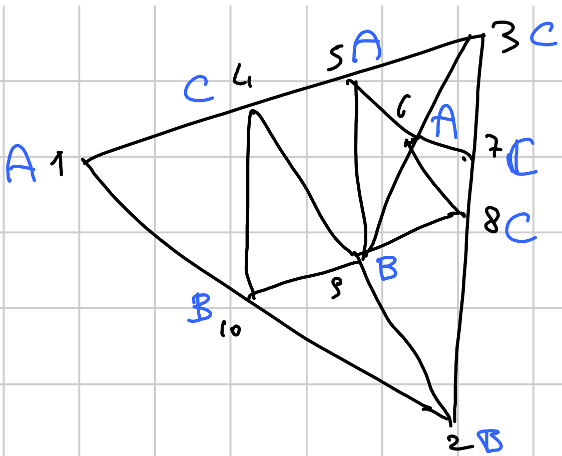
commuta

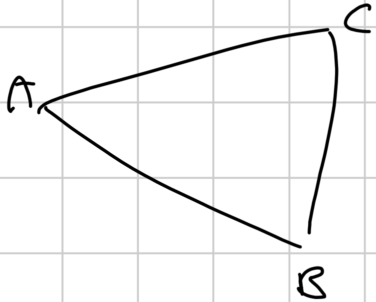
(si induce l'isomorfismo canonico

$$H_n(K) \longrightarrow H_n(M) \;)$$

"Dimo":







$$f(123) = 1\,4\,10 + 4\,9\,10 + 2\,9\,10 + 4\,5\,9 + 5\,6\,9 + \dots$$

$$\xrightarrow{f_*}$$

$$\pm ABC$$
$$0$$
$$\pm ABC$$

$\mathbb{Z}/2$

$$+ABC = g_*(123)$$