ETA 14/11/13

$\mathcal{C}$ categorie : $Obj(\mathcal{C})$; $\forall X, Y \in Obj(\mathcal{C})$
$Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ –

Funtori F covarianti da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$ è :
$\forall X \in \mathcal{C}$, $F(X) \in \mathcal{C}'$; $\forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$
$F(f) \in Hom_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$

Siano $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ – Chiamo

trasformazione naturale da F a G
il dato di $\varphi_A : F(A) \to G(A) \quad \forall A \in Obj(\mathcal{C})$
t.c.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \downarrow \varphi_A & & \downarrow \varphi_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

commuti $\forall A, B \in Obj(\mathcal{C})$, $\forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.
Diciamo che φ è isomorfismo se ogni φ_A
è un isomorfismo (rispetto a qualche struttura).

Teo: Sia H': $\begin{pmatrix} \text{coppie } (K,L) \\ K \text{ c.s.f.} \\ L \text{ sottocompl;} \\ \text{mappe PL di coppie} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{successioni} \\ \text{di gruppi} \\ \text{abeliani;} \\ \text{succ. di omomorf.} \end{pmatrix}$

che soddisfi:

I. Dimensione II. Omotopia III. Escissione

IV. Successione esatta lunga. V 0-omologia.

Se esiste una trasformazione naturale

$\varphi: H \to H'$ (H = funtore omologia costruito)

t.c. $\varphi_{\{pt\}}$ sia isomorfismo allora φ

è un isomorfismo.

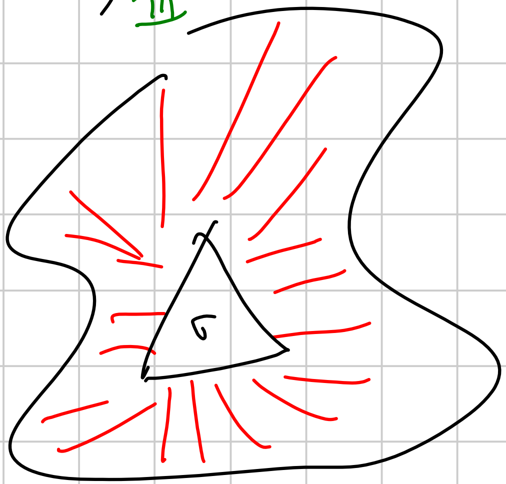
(Cioè: I-V determinano l'omologia.)

Dim: Devo vedere che qui $\varphi_{(K,P)}$ è isomorfismo.
Inizio con $P=\emptyset$ e per induzione su $\#K$.
Se $\#K=1$, $K=\{pt\} \Rightarrow$ OK. Sia $\#K>1$
e $\sigma \in K^{[n]}$ n max; $L=K\setminus\sigma$. $\forall m$ ho:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \to H_{m+1}(K,L) & \to & H_m(L) & \to & H_m(K) & \to & H_m(K,L) & \to & H_{m-1}(L) \to \cdots \\
\downarrow \varphi_{(K,L),m+1} & & \downarrow \varphi_{L,m} & & \downarrow \varphi_{K,m} & & \downarrow \varphi_{K,L,m} & & \downarrow \varphi_{L,m-1} \\
\cdots \to H'_{m+1}(K,L) & \to & H'_m(L) & \to & H'_m(K) & \to & H'_m(K,L) & \to & H'_{m-1}(L) \to \cdots
\end{array}$$

$\downarrow \varphi_{L,m}$ $\downarrow \varphi_{L,m-1}$ Sono isomorfismi per ipotesi induttiva

$$H_p(K,L) \underset{\mathrm{III}}{\cong} H_p(\sigma,\partial\sigma) \cong H_p(\Delta_n,\partial\Delta_n)$$



$$\cong H_p(D^n,\partial D^n)$$

$$\underset{\mathrm{IV}}{\cong} H_p(S^{n-1})$$

Stesso per $H'_p(K,L) \cong H'_p(S^{n-1})$

Inoltre I-V consentono il calcolo di $H_p(S^{n-1})$ e $H'_p(S^{n-1}) \Longrightarrow H_p(S^{n-1}) \cong H'_p(S^{n-1})$;

inoltre poiché φ commuta con tutto l'isomorfismo è naturale, ovvero

$\varphi_{(K,L),p} : H_p(K,L) \to H'_p(K,L)$ è isomorf.

Conclusione per $P = \emptyset$ da:

<u>5-lemma:</u>

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "\ell"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\
A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "j'"] & C' \arrow[r, "k'"] & D' \arrow[r, "\ell'"] & E'
\end{tikzcd}$$

righe esatte, $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ isomorfismi $\Rightarrow$ γ isomorfismo.

(Dim. nel seguito) Condizione per $P \neq \emptyset$ dallo stesso lemma:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \to & H_n(P) & \to & H_n(K) & \to & H_n(K,P) & \to & H_{n-1}(P) & \to & H_{n-1}(K) & \to \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \to & H'_n(P) & \to & H'_n(K) & \to & H'_n(K,P) & \to & H'_{n-1}(P) & \to & H'_{n-1}(K) & \to \cdots
\end{array}
$$

Dim.:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{\ell} & E \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\
A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{\ell'} & E'
\end{array}
$$

γ surjettive ; sia $c' \in C'$; $k'(c') \in D'$ $\Rightarrow$ (δ surj)

$k'(c') = \delta(d)$; $\ell'(k'(c')) = 0$ $\Rightarrow$ $\ell'(\delta(d)) = 0$

$\Rightarrow$ $\varepsilon(\ell(d)) = 0$ $\Rightarrow$ (ε 1-1) $\ell(d) = 0$

$\Rightarrow$ $d = k(c)$; $k'(c' - \gamma(c)) = k'(c') - \delta(d) = 0$

$\Rightarrow$ $c' - \gamma(c) = j'(b')$; (β surj) $b' = \beta(b)$; ora

$\gamma(j(b)) = j'(\beta(b)) = j'(b') = c' - \gamma(c)$

$\Rightarrow$ $c' = \gamma(c + j(b))$.

γ iniettiva: Sia $\gamma(c)=0$; allora $k'(\gamma(c))=0 \Rightarrow \delta(k(c))=0$

$\Rightarrow k(c)=0$ (δ 1-1) $\Rightarrow c=j(b)$; $\gamma(j(b))=0$

$\Rightarrow j'(\beta(b))=0 \Rightarrow \beta(b)=i'(a')$; ($\alpha$ surj) $a'=\alpha(a)$

$\beta(i(a))=i'(\alpha(a))=i'(a')=\beta(b) \Rightarrow$ (β 1-1) $b=i(a)$

$\Rightarrow c=j(b)=j(i(a))=0$ ✓ $\boxed{/\!/}$

Altre teorie omologiche

Fatto: la più piccola triangolazione del toro ha 14 triangoli _

Δ-complessi

$\Delta_n = \mathrm{Conv}(e_0, \dots, e_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$\varphi_i^{(n)} : \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n \qquad \begin{array}{ll} e_j \longmapsto e_j & \text{per } j < i \\ e_j \longmapsto e_{j+1} & \text{per } j \geq i \end{array}$$

(identificazione tra Δ_{n-1} e la faccia di Δ_n opposta al vertice e_i). Ordinamento vertici fisso. Se X è sp. top. chiamo struttura di Δ-complesso su X una famiglia $\mathcal{S} = \{\sigma_\alpha : \alpha \in A\}$, $\sigma_\alpha : \Delta_{n(\alpha)} \longrightarrow X$ con:

1. $\sigma_\alpha|_{\mathrm{int}(\Delta_{n(\alpha)})}$ è iniettiva

2. $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha(\mathrm{int}(\Delta_{n(\alpha)}))$

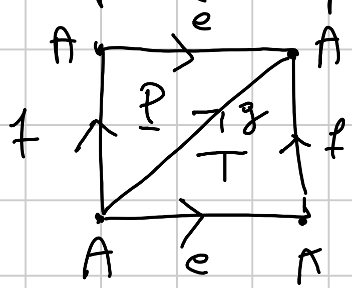
3. $\sigma_\alpha \circ \varphi_i^{(n(\alpha))} \in S \qquad \forall \alpha \in A,\ i = 0, \dots, n(\alpha)$

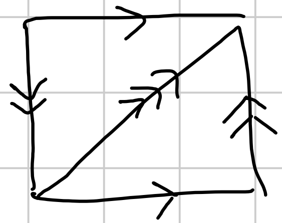
4. $Y \subset X$ aperto $\iff \sigma_\alpha^{-1}(Y)$ aperto in $\Delta_{n(\alpha)}\ \forall \alpha$.

<u>Cioè</u>: X è espresso come unione disgiunta di simplessi aperti; inoltre l'embedding di ciascun simplesso aperto astratto si estende al simplesso chiuso astratto;

su ogni simplesso faccia del bordo tale estensione è embedding, ma non sul bordo intero. (+ conseguenze ordinamento).

Esempio (dettagli dopo): toro $= \bigsqcup A, \mathring{e}, \mathring{g}, \mathring{f}, \mathring{T}, \mathring{P}$





Un Δ-complesso è $\bigsqcup$ simplessi astratti / incollamenti indotti dalle σ_α

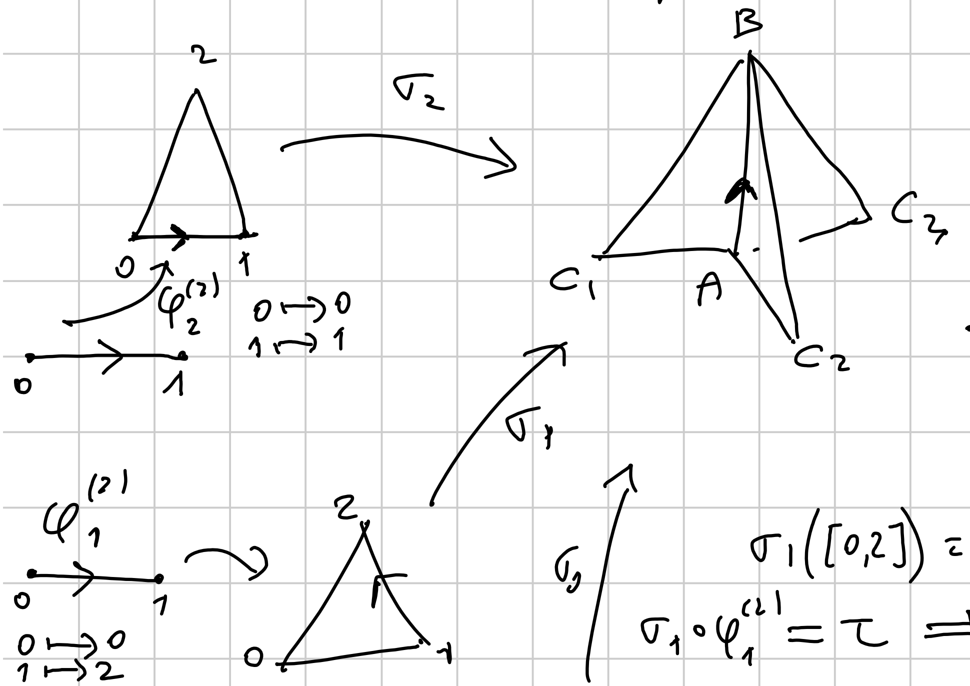
come spazio top

$x \in \Delta_{n(\alpha)}$ $\quad x \sim y$ se $\sigma_\alpha(x) = \sigma_\beta(y)$

$y \in \Delta_{n(\beta)}$

Inoltre in X ogni simplesso quindi ha una ben definita orientazione derivante dall'ordinamento dei vertici in qualsiasi sua versione astratta (cioè per qualunque

σ_α io uso di cui il simplesso è nell'immagine):



$\sigma_2(0) = A$

$\sigma_2(1) = B$

$\Downarrow$

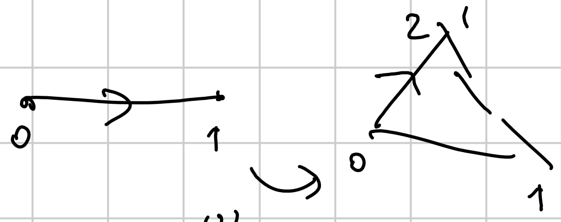
$\tau : [0,1] \to \dots$

$0 \mapsto A$

$1 \mapsto B$

$\sigma_1([0,2]) = [A,B]$

$\sigma_1 \circ \varphi_1^{(2)} = \tau \implies \sigma_2(0) = A, \ \sigma_2(1) = B$



$\sigma_0 \circ \varphi_0^{(2)} = \tau$

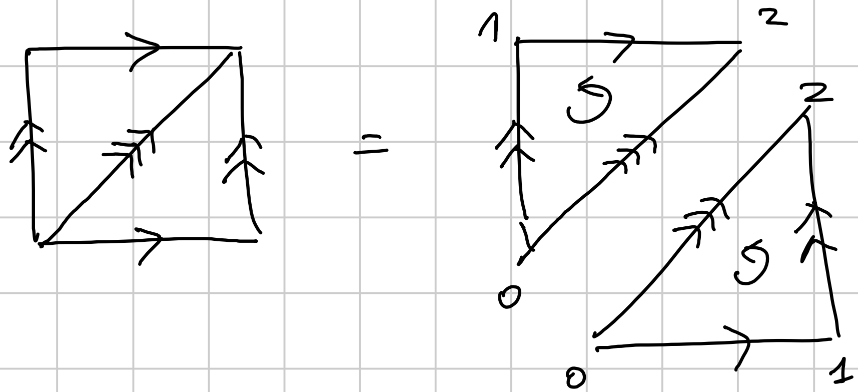
$\Longrightarrow$ $\sigma_1(01) = A$

$\sigma_1(2) = B$

$\varphi_0^{(2)}$ $0 \longmapsto 1$

$1 \longmapsto 2$

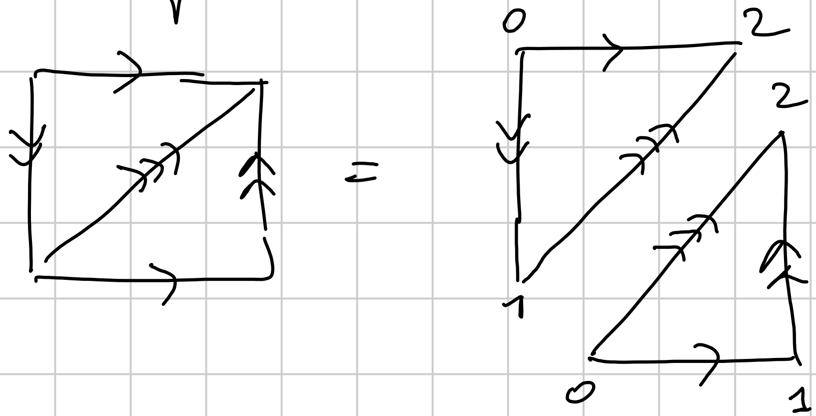
Toro:



Simplessi astratti + incollamenti simpliciali tra facce che rispettano orientazioni indotte da fissati ordini totali dei vertici

$\Longrightarrow$ Δ-complesso

Klein



Oss: un complesso simpliciale finito diventa un Δ-complesso scegliendo su ogni simplesso l'orientazione indotta da un ordinamento totale di tutti i vertici.

Oss: se X ha una struttura di Δ-complesso finito è omeo a $|K|$ K complesso simpliciale finito (suddividere molto).

X Δ-complesso; in X sono definiti i

simplessi; è ben definita la nozione di "un simplesso τ è faccia di un simplesso η":
se esiste α, $T, E \subset \Delta_{n(\alpha)}$ t.c. T faccia di E
e $\sigma_\alpha(T) = \tau$, $\sigma_\alpha(E) = \eta$ allora ciò accade
per ogni altro α t.c. $\eta \subset \mathrm{Im}(\sigma_\alpha)$

<u>Prop</u>: Ogni $\sigma_\alpha(\Delta_{n(\alpha)})$ è chiuso (#A qualsiasi)
<u>Dim</u>: $\sigma_\beta^{-1}(\sigma_\alpha(\Delta_{n(\alpha)}))$ è unione di
facce di $\Delta_{n(\beta)}$ e se c'è una faccia
ci sono le sue facce (ciò è vero per σ_α). ☒

$C_n^\Delta(X) = \langle \sigma_\alpha : n(\alpha) = n \rangle$ gruppo ab. libero

$\partial_n^\Delta : C_n^\Delta(X) \to C_{n-1}^\Delta(X)$

$$\partial_n^\Delta \sigma_\alpha = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \sigma_\alpha \circ \varphi_i^{(n)} \_$$

<u>Fatto</u>: $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0 \implies$ è ben def

$H_n^\Delta(X, Y) \_$

<u>Fatto</u>: Per (K,L) coppie di complessi sempl. finiti

$$H_n^{\Delta}(|K|,|L|) \cong H_n(K,L)$$

(isomorfismo canonico)

Si vede direttamente: scelto ordine totale dei vertici di K

si sceglie $\tilde{\sigma} : \Delta_n \longrightarrow \sigma$

che rispetta l'orientazione _