ETA 10/10/13

Lem: $|K|$ connesso $\Longrightarrow |K|, |K^{(1)}|$ connessi p.a.
e $\forall v_0, v_1 \in K^{[0]}$ sono uniti da cammino
simpliciale semplice.

Dim: $\mathcal{J} = \{ \underbrace{e_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot e_N^{\varepsilon_N}}_{\text{cammino simpliciale da } \bar{v}} \cdot \underbrace{\beta}_{\text{a meno di orientamento}} \}$

segmento dritto da $v \in \sigma^{[0]}$ a $x \in \mathrm{int}(\sigma)$

Fisso $\bar{v} \in K^{[0]}$

$X = \{\alpha(1) : \alpha \in \mathcal{I}\}$.

Affermo che X è aperto e chiuso in $|K|$ $(\Rightarrow X = |K|)$.

(Esercizio.)

$\Longrightarrow$ $|K|$ connesso per archi, $|K^{(1)}|$ è connesso per archi simpliciali

Inoltre: un cammino simpliciale minimale che unisce $v_0, v_1 \in K^{[0]}$ è semplice. $\boxtimes$

<u>Lem</u>: $\pi_1(|K^{(1)}|, \bar{v}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{lacci simpliciali non} \\ \text{semplificabili da } \bar{v} \end{array} \right\}$

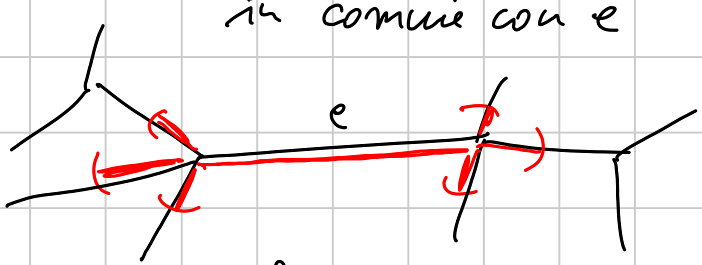
$(\nexists \ldots e^{\pm 1} \cdot e^{\mp 1} \ldots)$

con operazione : concatenazione + semplificazione.

Dim : sia $\alpha : [0,1] \to |K^{(1)}|$ laccio in v.

Per ogni $e \in K^{[1]}$ sia

$\mathring{U}(e) = e \cup$ semilati aperti con un estremo in comune con e



$\{U(e) : e \in K^{[1]}\}$ ric aperto di $|K^{(1)}|$

$\Rightarrow \{\alpha^{-1}(U(e)) : e \dots\}$ ric. aperto di $[0,1]$

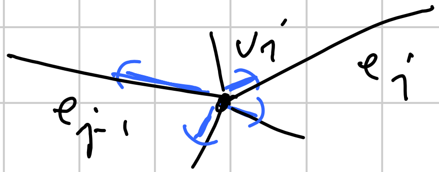
$\Rightarrow$ ho numero di Lebesgue

$\Rightarrow \exists\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ t.c.

$\alpha([t_{j-1}, t_j]) \subset U(e_j)\ \forall j$

Wlog $e_{j+1} \neq e_j\ \forall j$.

$\alpha(t_j) \in \underline{U(e_{j-1}) \cap U(e_j)} \Rightarrow \exists\, v_j \in e_{j-1} \cap e_j$



scelto ε_j t.c.

$\alpha([t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon]) \subset$

posso omotopare α su $[t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon]$

in modo che $\alpha(t_j) = v_j$.

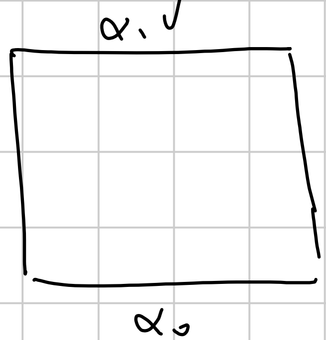
Continuo a vedere $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U(e_j)$

$\Longrightarrow$ posso omotopare in modo che

$\alpha|_{[t_{j-1}, t_j]} = e_j^{\pm 1}$.

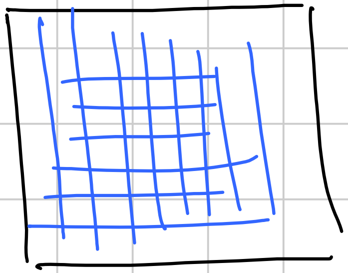
Resta da vedere: due cammini simpliciali omotopi si ottengono via semplificazioni.

Sia



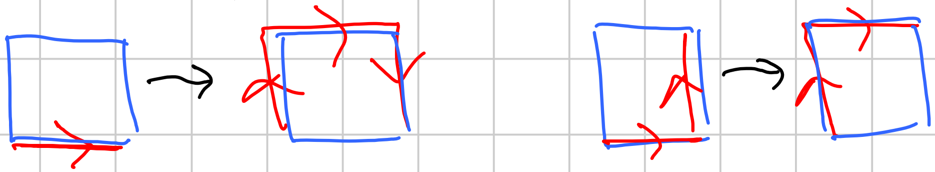
$\xrightarrow{F} |K^{(1)}|$

Posso suddividere
in modo che:



- su ogni lato di quadratino F è costante o un lato
- $F(\text{quadratino}) \subset U(e)$

$\alpha_0 \rightsquigarrow \alpha_1$ composizione di transizioni



e lungo ogni quadratino ho

$\boxed{///}$

Thm: $\pi_1(|K|) \cong \dfrac{\pi_1(|K^{(1)}|, v)}{\langle w_T : T \in K^{[2]} \rangle}$

Inoltre: $H_1(K) = \dfrac{\left\{ \sum_{e \in K^{[1]}} n_e \cdot e \ : \ \partial_1(\ldots) = 0 \right\} = Z_1}{\langle \partial T \ : \ T \in K^{[2]} \rangle = B_1}$

Thm: $H_1(K) = \dfrac{\pi_1(|K|)}{[\pi_1(|K|), \pi_1(|K|)]}$

Pf: Definisco $\psi : \pi_1(|K|) \to H_1(K)$ come

$$\psi(e_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k}^{\varepsilon_k}) = [\varepsilon_1 \cdot e_{i_1} + \cdots + \varepsilon_k \cdot e_{i_k}]$$

Ben def:

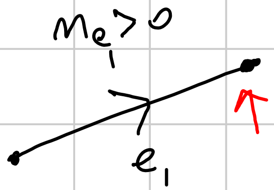
* $\partial_1 (\varepsilon_1 e_{i_1} + \cdots + \varepsilon_k e_{i_k}) = 0$

* $\psi(w_T) = \partial T$

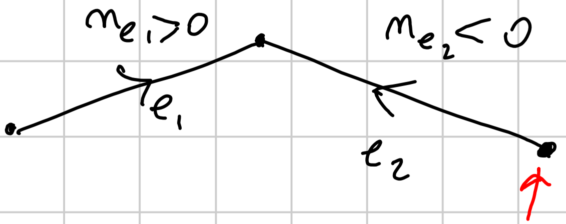
ψ suriettiva: Sia $z = \sum_{e \in K^{[1]}} n_e \cdot e \in Z_1(K)$

Provo che $z \in Im(\psi)$ per induzione su $\sum |n_e|$.

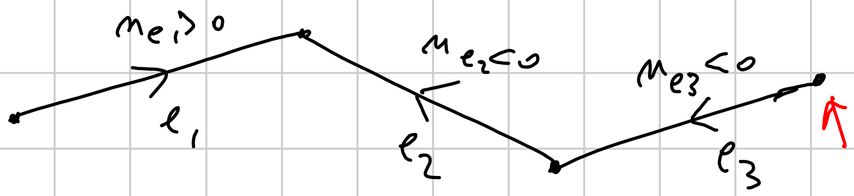
$\sum |n_e| = 0$ ok. $\sum |n_e| \neq 0 \Rightarrow$



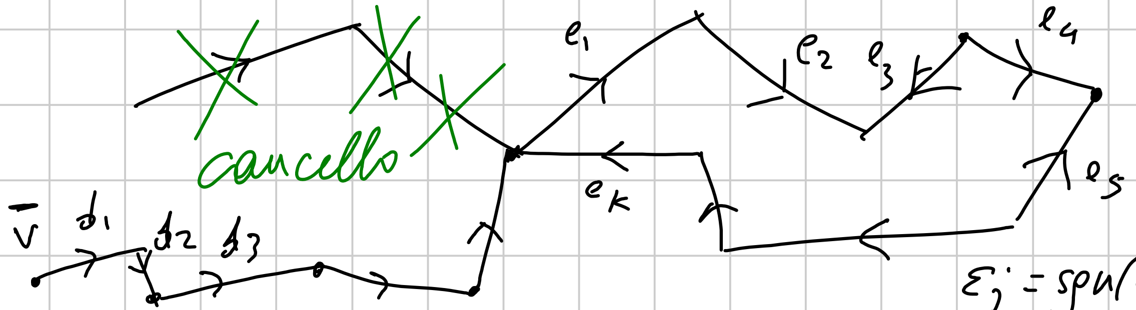
$\partial z = 0 \Rightarrow \exists\, e_2$ con



$\partial z = 0 \Rightarrow \exists\, e_3$



Procedo finché non rivisito uno stesso vertice



$$\varepsilon_j = \operatorname{sgn}(n_{e_j})$$

$$\sum n_e \cdot e - \psi\left(d_1 \cdot d_2 \cdots e_1^{\varepsilon_1} \cdots e_k^{\varepsilon_k} \cdots d_2^{-1} d_1^{-1}\right)$$

ha $\sum |n_e| =$ (vecchia $\sum |n_e|$) $- k$

$\Rightarrow$ per induzione $\sum n_e \cdot e \in \mathrm{Im}(\psi)$.

Conclusione: $\mathrm{Ker}(\psi) = [\pi_1(|K|), \pi_1(|K|)]$.

Sia $e_1^{\varepsilon_1} \cdots e_k^{\varepsilon_k} \in \mathrm{Ker}\,\psi$

$\Rightarrow \varepsilon_1 e_1 + \dots + \varepsilon_k e_k = \partial T_1 + \dots + \partial T_h$

Posso trovare γ_j cammino simpliciale t.c.

$\psi(\gamma_j) = \partial T_j$

$\Rightarrow$ sostituendo $e_1^{\varepsilon_1} \cdots e_k^{\varepsilon_k}$ con $e_1^{\varepsilon_1} \cdots e_k^{\varepsilon_k} r_1^{-1} \cdots r_h^{-1}$

posso supporre $\varepsilon_1 e_1 + \dots + \varepsilon_k e_k = 0$.

In questa ipotesi dobbiamo provare che

$e_1^{\varepsilon_1} \cdots e_k^{\varepsilon_k}$ è prodotto di commutatori

(ciò vale nel gruppo libero generato da $K^{[1]}$).

Per induzione su $\# K^{[1]}$. Passo base OK.

Passo induttivo: per induzione sul numero

di volte in cui compare $e_1^{\pm 1}$. Se 0 ok

($K^{[1]} = \{e_1, \dots, e_N\}$) per induzione su $N = \# K^{[1]}$.

Se >0 allora ho: somma algebrica esponenti di e_1 è nulla $\Rightarrow$ ho

$$w \cdot e_1^{\pm 1} \cdot \underbrace{v}_{\text{non compare } e_1} \cdot e_1^{\mp 1} \cdot u$$

$$\underbrace{w \cdot \underbrace{\underbrace{e_1^{\pm 1} \cdot v \cdot e_1^{\mp 1} \cdot v^{-1}}_{\in [\cdot,\cdot]} \cdot \underbrace{v \cdot u\, w}_{\substack{\in [\cdot,\cdot] \\ \text{per induzione}}}}_{\in [\cdot,\cdot]} \cdot w^{-1}}_{\in [\cdot,\cdot]}$$

$\boxtimes$

Presentazioni esplicite di $\pi_1(|K|)$ e $H_1(K)$
(da cui ancora $H_1 = \pi_1/[\pi_1, \pi_1]$).

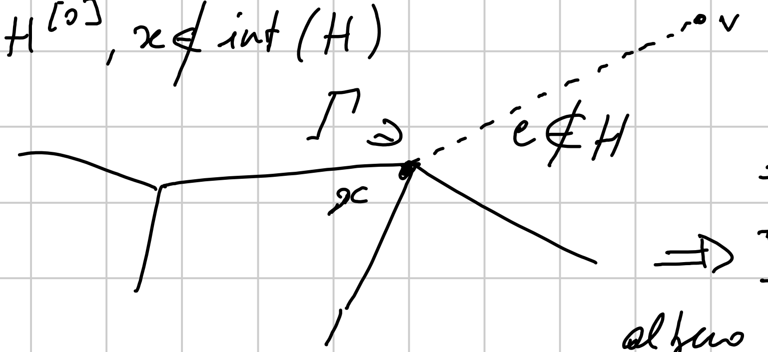
Grafo è $|K|$ con $\dim K = 1$.
$\Gamma \subset K$ è albero se $\forall v_0, v_1 \in \Gamma^{[0]}$ esiste unico cammino simpliciale semplice che li unisce.

Lem: G connesso, $\Gamma \subset G$ albero max $\Rightarrow \Gamma \supset G^{[0]}$.
Dim: prendo $H = \Gamma \cup$ tutti i lati di G con entrambi gli estremi in Γ.

$|H|$ chiuso ;

$x \in |H|$, $x \notin H^{[0]} \Rightarrow x \in \mathrm{int}(|H|)$.

$x \in H^{[0]}$, $x \notin \mathrm{int}(H)$



$\Rightarrow v \notin \Gamma$

$\Rightarrow \Gamma \cup e \cup v$

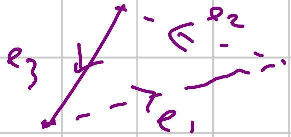
albero : contro max .

$\Rightarrow |H| = G$ ma $H^{[0]} = T^{[0]} \Rightarrow T^{[0]} = G^{[0]}$. $\square$

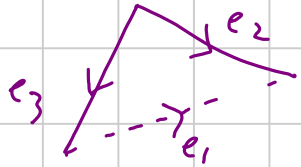
Sia K complesso simpliciale; $T \subset K^{[1]}$ albero max; $\mathcal{G} = K^{[1]} \setminus T^{[1]}$. Considero $\mathbb{Z}^{*\mathcal{G}}$, $\mathbb{Z}^{\mathcal{G}}$ e $Ab: \mathbb{Z}^{*\mathcal{G}} \to \mathbb{Z}^{\mathcal{G}}$. Per $T \in K^{[2]}$ considero $w_T \in \mathbb{Z}^{*\mathcal{G}}$ = la parola ∂T con i lati in T cancellati

$w_T = e_1 \cdot e_2^{-1} \cdot e_3^{-1}$

ben def / coniugio + inverso



$w_T = e_1 \cdot e_2$



$w_T = e_1$

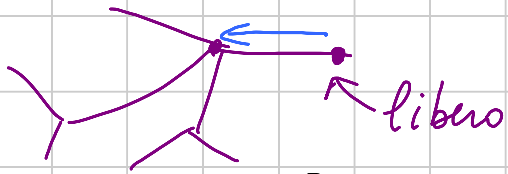
<u>Teo</u>: $\pi_1(|K|) \cong \dfrac{\mathbb{Z}^{*g}}{\langle w_T : T \in K^{[2]} \rangle}$; $H_1(K) \cong \dfrac{\mathbb{Z}^{g}}{\langle Ab(w_T) : T \in K^{[2]} \rangle}$

$\left(\Longrightarrow H_1 = \pi_1 / [\pi_1, \pi_1] \right)$.

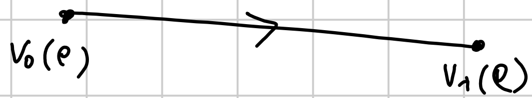
<u>Dimo</u>: Γ ha vertici liberi (di valenza 1 in Γ)

$\Longrightarrow$ v libero

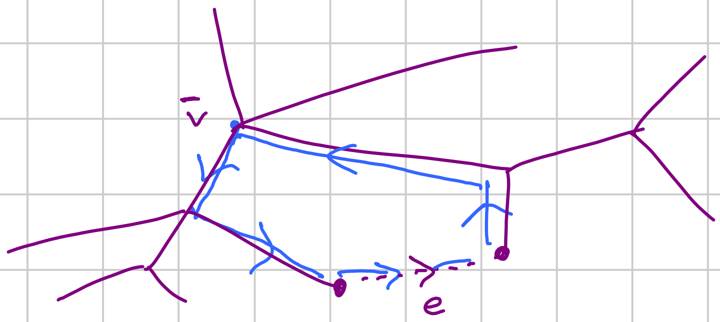
Per induzione su $\# T^{[0]}$ provo che T è contraibile



Per ogni $v \in K^{[0]}$ chiamo $c_T(v)$ l'unico cammino semplice da $\bar{v}$ a v in T. Per $e \in G$ (orientato)



e pongo $\alpha(e) = c_T(v_0(e)) \cdot e \cdot c_T(v_1(e))^{-1}$



Claim $\mathbb{Z}^{*\mathcal{G}} \longrightarrow \pi_1(|K^{(1)}|, \bar{v})$

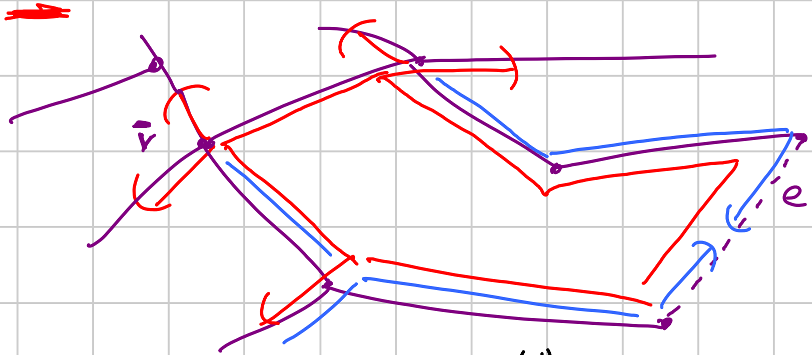
$e \longmapsto [\alpha(e)]$ è isomorfismo.

Per induzione su $\#\mathcal{G}$. Se 0 ok.

Se no $e \in \mathcal{G}$ e pongo

$U = |K^{(1)}| \setminus$ punto medio di e

$V = \alpha(e) \cup$ tutti i semilati che lo toccano



U si retrae su $|K^{(1)} \setminus e|$

V si retrae su $\alpha(e)$

$U \cap V$ si retrae su $\bar{v}$

$$\Longrightarrow \pi_1(|K^{(1)}|) = \pi_1(|K^{(1)} \setminus e|) * \mathbb{Z}_{\alpha(e)}$$

$$\| \qquad \mathbb{Z}^{*(g \setminus e)}$$

può essere

(tracce).

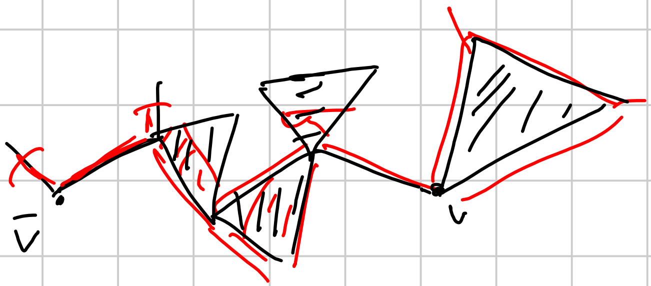
Claim $\pi_1(|K^{(2)}|) = \dfrac{\mathbb{Z}^{*g}}{\langle w_\tau : \tau \in K^{(2)} \rangle}$

Per induzione su $\# K^{[2]}$. Se 0 ok.

Se >0 sia $T \in K^{[2]}$ e

$U = |K^{(2)}| \setminus$ baricentro di T

$\bar{V}$ = intorno aperto regolare di $c_1(v) \cup T$ con $v \in T^{[0]}$



U si retrae su $|K^{(2)} \setminus T|$

V è contrattile

$U \cap V$ si retrae su $c_1(v) \cup \partial T \simeq S^1$

$$\Rightarrow \pi_1(|K^{[2]}|) = \pi_1(|K^{(2)} \setminus T|) / \mathbb{Z}$$

Per concludere devo vedere che tramite l'isomorfismo

$$\frac{\mathbb{Z}^{*g}}{\langle w_S : S \in K^{(2)} \setminus T \rangle} \xrightarrow{\alpha} \pi_1(|K^{(2)} \setminus T|)$$

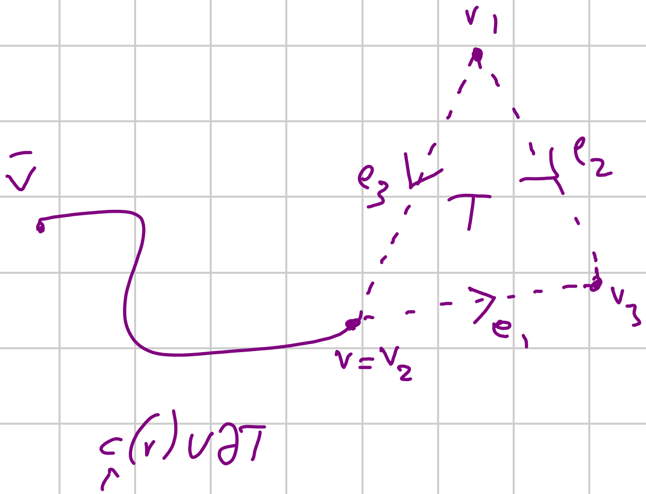
il generatore di $\pi_1(c_T(v) \cup \partial T)$ è w_T.

Alcuni casi da distinguere:

* quanti lati di T sono in $\mathcal{T}$ $(0, 1, 2)$
* orientazioni.

Con 0 lati di T in Γ:

$$w_T = e_1 \cdot e_2^{-1} \cdot e_3$$



Generatore di $\pi_1(c_\Gamma(v) \cup \partial T)$:

$$c_\Gamma(v) \cdot e_1 \cdot e_2^{-1} \cdot e_3 \cdot c_\Gamma(v)^{-1} =$$

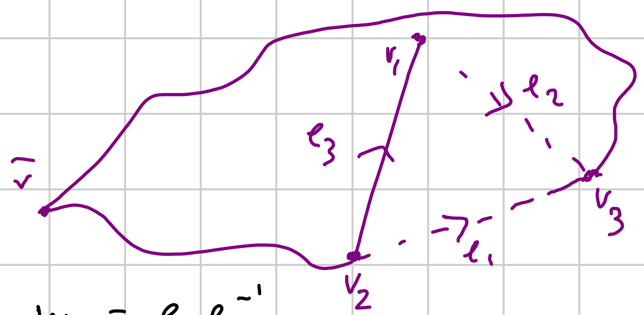
$$= c_\Gamma(v_2) \cdot e_1 \cdot c_\Gamma(v_3)^{-1} \cdot \qquad = \alpha(e_1)$$

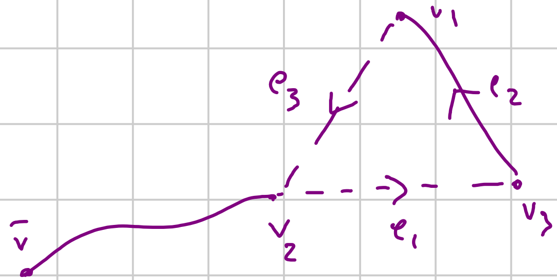
$$\cdot\, c_\Gamma(v_3) \cdot e_2^{-1} \cdot c_\Gamma(v_1)^{-1} \cdot \qquad = \alpha(e_2)^{-1}$$

$$\cdot\, c_\Gamma(v_1) \cdot e_3 \cdot c_\Gamma(v_2)^{-1} \qquad = \alpha(e_3)$$

$$= \alpha(e_1) \cdot \alpha(e_2)^{-1} \cdot \alpha(e_3)$$

$$= \alpha(w_T)$$





$w_T = e_1 \cdot e_2^{-1}$ $\qquad\qquad$ $w_T = e_3 \cdot e_1$

gen di $\pi_1(C_\Gamma(v) \cup \partial T)$

$c_\Gamma(v) \cdot e_1 \cdot e_2^{-1} \cdot e_3^{-1} \cdot c_\Gamma(v)^{-1}$ $\qquad$ (Esercizio)

$$= \underbrace{c_\Gamma(v) \cdot e_1 \cdot c_\Gamma(v_3)^{-1}}_{\alpha(e_1)} \cdot \underbrace{c_\Gamma(v_3) \cdot e_2^{-1} \cdot \underbrace{e_3^{-1} \cdot c_\Gamma(v_2)^{-1}}_{c_\Gamma(v_1)^{-1}}}_{\alpha(e_2)^{-1}}$$

$$\alpha(e_1 \cdot e_2^{-1}) = \alpha(w_T)$$