ETA 5/12/13

$$G \otimes \mathbb{Z}/_m \cong G/_{m \cdot G}$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}/_k \otimes \mathbb{Z}/_h \cong \mathbb{Z}/_{\text{G.C.D.}(k,h)} .$$

$$\text{Tor}(A,B) = $$ "misura della torsione comune tra A e B"

← di ordine comune

$$0 \longrightarrow \underset{\text{libero}}{K} \xrightarrow{i} \underset{\text{libero}}{F} \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad \text{esatta}$$

$$\mathrm{Tor}(A,B) = \mathrm{Ker}\left(K \otimes B \xrightarrow{i \otimes id_B} F \otimes B\right).$$

Visto $\mathrm{Tor}(A,B) = \mathrm{Tor}(B,A) \Rightarrow$ ben def.

$$\mathrm{Tor}(A_1 \oplus A_2, B) \cong \mathrm{Tor}(A_1,B) \oplus \mathrm{Tor}(A_2,B)$$

Prop.: (1) $\mathrm{Tor}(A, \mathbb{Z}) = 0$

(2) $\mathrm{Tor}(A, \mathbb{Z}/p) \cong \{ a \in A : p \cdot a = 0 \}$

(3) $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/q, \mathbb{Z}/p) \cong \mathbb{Z}/_{\mathrm{G.C.D.}(p,q)}$ $\left(\cong \mathbb{Z}/_p \otimes \mathbb{Z}/_q \right)$

Dim.: (1) $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} F \longrightarrow A \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} K \otimes \mathbb{Z} & \xrightarrow{i \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}} & F \otimes \mathbb{Z} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ K & \xrightarrow{i} & F \end{array} \Rightarrow \mathrm{Ker} = 0$$

(2) $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow[p\cdot]{i} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p \longrightarrow 0$

$$\begin{tikzcd} A \otimes \mathbb{Z} \arrow[r, "id_A \otimes i"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & A \otimes \mathbb{Z} \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\ A & A \end{tikzcd}$$

$$a = a \otimes 1 \longmapsto a \otimes p = p \cdot a$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Ker} = \{ a \in A : p \cdot a = 0 \}$$

(3) $\{ [n] \in \mathbb{Z}/p : q \cdot n = 0 \} \cong \mathbb{Z}/_{G.C.D.(p,q)}$.

$\blacksquare$

Oss: $0 \to A \to B \to C \to 0$ esatta

$\Rightarrow C \cong B/A$ $\not\Rightarrow B = A \oplus C$.

Prop: Data $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$
esatta sono fatti equivalenti:
(1) $\exists f: C \to B$ t.c. $p \circ f = id_C$
(2) $\exists q: B \to A$ t.c. $q \circ i = id_A$
Entrambi i fatti implicano che $B \cong A \oplus C$;
in tal caso diremo che la successione splitta.

<u>Dim</u>: (1) Data $f: C \to B$ definisco

$F: A \oplus C \to B$ come $F(a,c) = i(a) + f(c)$.

Affermo che è isomorfismo:

$F(a,c) = 0 \Rightarrow p(F(a,c)) = 0 \Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{p(i(a))} + \underset{\overset{\shortparallel}{c}}{p(f(c))} = 0$

$\Rightarrow c = 0 \Rightarrow i(a) = 0 \Rightarrow a = 0$.

Dato $b \in B$ ho $p(b - f(p(b))) = p(b) - \underbrace{p(f(p(b)))}_{\overset{\shortparallel}{p(b)}} = 0$

$\Rightarrow b - f(p(b)) = i(a)$ per qualche $a \in A$

$\Rightarrow b = i(a) + f(p(b)) = F(a, p(b))$.

Date $F: A \oplus C \to B$

definisco $g: B \to A$ come $\pi_A \circ F^{-1} \Rightarrow (2)$

(2) Data $g: B \to A$ con $g \circ i = id_A$

definisco $Q: B \to A \oplus C$

$b \mapsto (g(b), p(b))$

E' isomorfismo ✓.

Definisco $f: C \to B$

come $f(c) = Q^{-1}(0, c)$. ▨

Teorema dei coefficienti universali

con C_n libero $\forall n$

Sia (C_n, ∂_n) un complesso di catene e sia H_n la sua omologia; pongo $C_n^G = C_n \otimes G$, $\partial_n^G = \partial_n \otimes id_G$ e H_n^G l'omologia di (C_n^G, ∂_n^G). Allora esiste una successione esatta naturale

$$0 \to H_n \otimes G \xrightarrow{g_n} H_n^G \xrightarrow{f_n} \mathrm{Tor}(H_{n-1}, G) \to 0$$

Inoltre la successione splitta (ma non in modo naturale).

Cor: per X spazio top e G gruppo ho

$$H_n(X;G) \cong \big(H_n(X) \otimes G\big) \oplus \mathrm{Tor}\big(H_{n-1}(X), G\big)$$

ma l'isomorfismo non è funtoriale rispetto a neppure $f: X \to Y$. (Stesso con (X,A).)

Es: $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ $\quad H_0 = \mathbb{Z} \quad H_1 = \mathbb{Z}/2 \quad H_2 = 0$;

$$H_0^{\mathbb{Z}/2} = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 \oplus 0 = \mathbb{Z}/2$$

$$H_1^{\mathbb{Z}/2} = \mathbb{Z}/2 \otimes \mathbb{Z}/2 \oplus \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2 \oplus 0 = \mathbb{Z}/2$$

$$H_2^{\mathbb{Z}/2} = 0 \otimes \mathbb{Z}/2 \oplus \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2 \ .$$

— o —

Dimo: Notazione $C_n^G = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \sigma_i \ : \ \lambda_i \in G, \ \sigma_i \in C_n \right\}$

$$c_n : C_n \otimes G \to C_n^G \quad (\text{è l'identità})$$

$$\sigma \otimes \lambda \mapsto \lambda \cdot \sigma$$

Per def ($\partial_n^G = \partial_n \otimes id_G$) ho

(1) $\quad \partial_n^G \circ c_n = c_{n-1} \circ (\partial_n \otimes id_G)$.

$(1) \Rightarrow c_n(Z_n \otimes G) \subset Z_n^G \quad , \quad c_n(B_n \otimes G) \subset B_n^G$

quindi definisco

$$z_n : Z_n \otimes G \to Z_n^G \qquad b_n : B_n \otimes G \to B_n^G$$

Notazione:

$$0 \to B_n \xhookrightarrow{j_n} Z_n \xrightarrow{p_n} H_n \to 0$$

$$0 \to B_n^G \xhookrightarrow{j_n^G} Z_n^G \xrightarrow{p_n^G} H_n^G \to 0$$

$$Z_n \xhookrightarrow{i_n} C_n \qquad B_n \xhookrightarrow{l_n} C_n$$

$$Z_n^G \xhookrightarrow{i_n^G} C_n^G \qquad B_n^G \xhookrightarrow{l_n^G} C_n^G \, .$$

Per def: $Tor(H_{n-1}, G) = \ker\left(B_{n-1} \otimes G \xrightarrow{j_{n-1} \otimes id_G} Z_{n-1} \otimes G\right)$.

(2)

Voglio:

$$0 \to H_m \otimes G \xrightarrow{g_m} H_m^G \xrightarrow{f_m} Tor(H_{m-1}, G) \to 0 .$$

Definisco: $g_m(p_m(u) \otimes \lambda) = p_m^G(z_n(u \otimes \lambda)) \quad \forall u \in Z_m$

$$f_m\left(p_m^G\left(\sum \lambda_i \sigma_i\right)\right) = \sum_i (\partial_m \sigma_i) \otimes \lambda_i \quad \forall \sum \lambda_i \sigma_i \in Z_m^G$$

g_m ben def:

• $z_n(u \otimes \lambda) \in Z_n^G$ vero per costruz. di z_n

• Se $u \in B_n$ allora $z_n(u \otimes \lambda) \in B_n^G$: vero

f_n ben def.:

• Sia $\sum_i \lambda_i \sigma_i \in C_n^G$; allora

$$\sum (\partial_n \sigma_i) \otimes \lambda_i \in B_{n-1} \otimes G \quad ; \text{ inoltre}$$

$$z_n (j_{n-1} \otimes id_G) \left(\sum (\partial_n \sigma_i) \otimes \lambda_i \right)$$

$$= z_n \left(\sum_i (j_{n-1} \partial_n \sigma_i) \otimes \lambda_i \right) \qquad (3)$$

$$= z_n \left(\sum (\partial_n \sigma_i) \otimes \lambda_i \right) = \sum_i \lambda_i \partial_n \sigma_i$$

$= \partial_n^G (\sum \lambda_i \sigma_i)$

Dunque se $\sum \lambda_i \sigma_i \in Z_n^G$ ho

$z_n (j_{n-1} \otimes id_G)(\uparrow) = 0$ ma z_n è iniettiva

$\Rightarrow \sum \lambda_i \sigma_i \in \mathrm{Ker}\,(j_{n-1} \otimes id_G) = \mathrm{Tor}(H_{n-1}, G)$

- Se $\sum \lambda_i \sigma_i \in B_n^G$ allora $\sum \partial_n \sigma_i \otimes \lambda_i = 0$

Infatti se $\sum \lambda_i \sigma_i = \partial_{n+1}^G w$

$\Rightarrow b_n \left(\sum (\partial_n \sigma_i) \otimes \lambda_i \right) = \sum \lambda_i \partial_n \sigma_i$

$= \partial_n^G (\sum \lambda_i \sigma_i) = \partial_n^G \circ \partial_{n+1}^G w = 0$

ma b_n è iniettiva $\Longrightarrow$ ok.

g_n iniettiva
f_n surgettiva
$\operatorname{Im} g_n \subset \operatorname{Ker} f_n$
$\operatorname{Ker} f_n \subset \operatorname{Im} g_n$

Tutti i dettagli in rete (dove G si chiama R e " " si chiama $\mathbb{Z}$)

La successione splitta ma non in modo naturale.

<u>Oss</u>: $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ esatta con
C libero allora C splitta: se C è

liberamente generato da $\{x : x \in X\}$ salvo a caso $f(x) \in p^{-1}(x)$.

Dunque $0 \to Z_n \hookrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \to 0$ splitta ($B_{n-1} \subset C_{n-1}$ che è libero) dunque esiste $q_n : C_n \to Z_n$ che è l'identità su Z_n

Ora si definisce

$$q_n^G : H_n^G \to H_n \otimes G$$

$$\left(\sum \lambda_i \sigma_i\right) \longmapsto \sum \left(q_n(\sigma_i)\right) \otimes \lambda_i$$

Resta da vedere che è ben definita e che $g_n^a \circ g_n = id_{H_n \otimes G}$. (Reste). $\boxed{\nabla_1}$

Q: $H_*(X \times Y)$ come è legata a $H_*(X)$ e $H_*(Y)$?

<u>Teo</u> (formula di Künneth): esiste una successione esatta funtoriale (in qualsiasi teoria omologica)

$$0 \to \bigoplus_{p+k=n} H_p(X) \otimes H_k(Y) \to H_n(X \times Y)$$

$$\to \bigoplus_{p+k=n-1} \mathrm{Tor}\big(H_p(X), H_k(Y)\big) \to 0 .$$

Inoltre la successione splitta ma non funtorialmente. Dunque

$$H_n(X \times Y) \cong \Big(\bigoplus_{p+k=n} H_p(X) \otimes H_k(Y)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p+k=n-1} \mathrm{Tor}\big(H_p(X), H_k(Y)\big)\Big)$$

ma l'isomorfismo non è naturale

rispetto e mappe $f: X \to Z$, $g: Y \to W$.

Dimo diretta possibile (anche astratta, con complessi liberi di catene) come UCT.

—— ∘ ——

Definisco complessi di catene

$E(m)$: $\quad E(m)_n = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = m \\ 0 & \text{altr.} \end{cases}$; $\partial_n^{E(m)} = 0$

$$\Longrightarrow H_n(E(m)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$D(m,k): \quad D(m,k)_n = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = m, \ n = m+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\partial_{m+1}^{D(m,k)}(1) = k \qquad \partial_n^{D(m,k)} = 0 \quad \forall n \neq m+1$$

$$\Rightarrow \quad H_n(D(m,k)) = \begin{cases} \mathbb{Z}/k & n = m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Prop: ogni complesso di catene con gruppi liberi finitamente generati è somma diretta di complessi $E(m)$, $D(m,k)$ _

Idea: $\dots\ \ C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \to \dots$

g generatore di C_{n+1}; se $\partial_{n+1} g = 0$
estraggo un addendo $E(n+1)$; se
$\partial_{n+1} g = h \neq 0$ noto che esiste h_0 primitivo
in C_n t.c. $h = k \cdot h_0$ e h_0 si estende
a un insieme di generatori di C_n; inoltre
$\partial_n h_0 = 0$ (perché $\partial_n h = 0$) $\Rightarrow$ posso estrarre
un addendo $D(n, k)$.

Dimo: Do' dimostrazione cellulare finita –

X, Y CW complessi finiti.

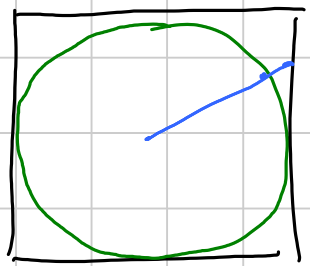
Se $a \in X^{[p]}$, $b \in Y^{[k]}$ ho

$$a : \partial D^p \to X^{(p-1)} \qquad b : \partial D^k \to Y^{(k-1)}$$

$$A : D^p \to X \qquad B : D^k \to Y$$

Definisco

$$\begin{tikzcd} D^{p+k} \arrow[r, "A\cdot B"] \arrow[d, "\text{omeo radiale canonico}"'] & X \times Y \\ D^p \times D^k \arrow[ur, "A\times B"'] & \end{tikzcd}$$



e $a \cdot b = A \cdot B\big|_{\partial D^{p+k}}$

Facile: l'insieme di tutte tali mappe dà una struttura di CW complesso finito a $X \times Y$, con

$$(X \times Y)^{[n]} = \{ a \cdot b \ : \ a \in X^{[p]}, \ b \in Y^{[k]}, \ p+k=n \}.$$

Affermo che se $a \in X^{[p]}, \ b \in Y^{[k]}, \ p+k=n$ ho

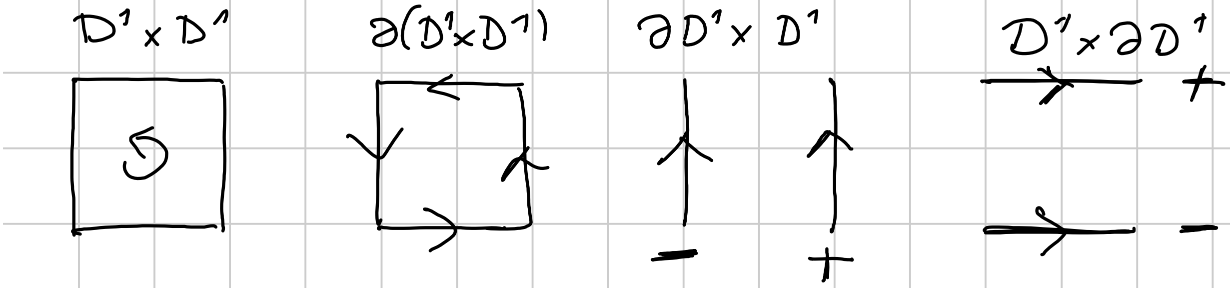
$$\partial_n^{X\times Y}(a\cdot b) = (\partial_n^X a)\cdot b + (-1)^p a\cdot(\partial_n^Y b)$$

Si tratta di vedere che

$$\partial(D^p \times D^k) = (\partial D^p)\times D^k + (-1)^p D^p \times (\partial D^k)$$

(D^p, D^k hanno fissate orientazioni, tutti i $\times$ hanno orientazione prodotto)

<u>Esempio</u>: $p = k = 1$



(Vedere anche:

$p=1 \quad k=2$, $\quad p=2$, $k=1$).

Abbiamo provato:

$$C_n(X \times Y) = \bigoplus_{p+k=n} C_p(X) \otimes C_k(Y)$$

con $\partial_m^{X\times Y}(a\otimes b) = (\partial_p a)\otimes b + (-1)^p a\otimes(\partial_k b)$.

In generale se U, W sono complessi di catene definisco $U\otimes W$ come

$$(U\otimes W)_n = \bigoplus_{p+k=n} U_p \otimes W_k$$

$$\partial(u\otimes w) = (\partial u)\otimes w + (-1)^{\dim u}\, u\otimes \partial w.$$

Affermo che

$$H_n(U \otimes W) \cong \bigoplus_{p+k=n} H_p(U) \otimes H_k(W)$$
$$\oplus \bigoplus_{p+k=n-1} \mathrm{Tor}(H_p(U), H_k(W))$$

(per U, W complessi di catene con gruppi liberi finitamente generati).

<u>Strategia</u> (1) provare che se è vero per $U_1 \otimes W$, $U_2 \otimes W$ è vero per

$(U_1 \oplus U_2) \otimes W$

(2) Provare che è vero se U e W sono entrambi del tipo $E(n)$, $D(m,k)$

(Caso più complicato $D(m,k) \oplus D(s,r)$)

$\blacksquare$