Nuovo orario: mart. 18-20 invece che mercoledì (da confermare).

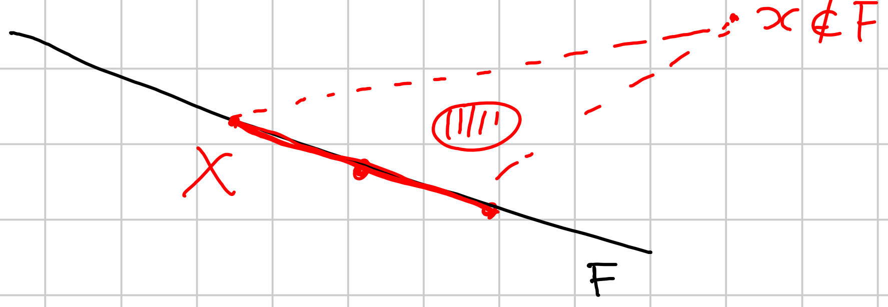
Per provare che $th(K)$ dipende solo da $|K|$ serve: <u>Teo</u>: $|K| = |L| \Rightarrow$ hanno suddivisione comune.

Lem.: $X \subset \mathbb{R}^N$ convesso $\Rightarrow \exists$ unico stsp. aff. di dim massimale in cui X ha punti interni (denotato con $S(X)$). Inoltre $X \subset S(X)$.

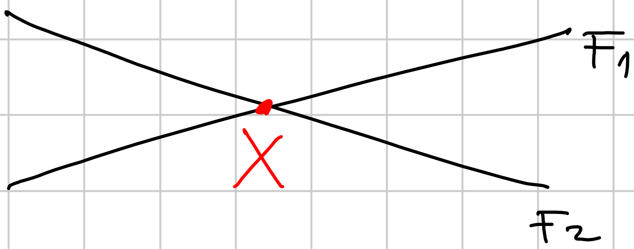
Dim: $X = \emptyset$ ...

$X \neq \emptyset$ esiste F di dim max in cui X ha pti interni.

Dico che $X \subset F$:



Se $X \not\subset F$, $x \in X \setminus F$, X ha punti interni in $\mathrm{Aff}(F \cup x)$ contro la massimalità. Unicità



$F_1 \neq F_2$

$\square$

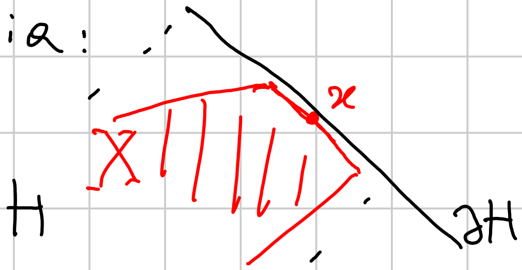
Cor: X convesso, è definita $\dim(X) = \dim(F(X))$.

Def: se X è convesso chiamo H semi-spazio in $\mathbb{R}^N$ di supporto se $X \subset H$.

Lem: $X \subset \mathbb{R}^N$ convesso e chiuso, $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^N}(X) \neq \emptyset$ (cioè $F(X) = \mathbb{R}^N$)

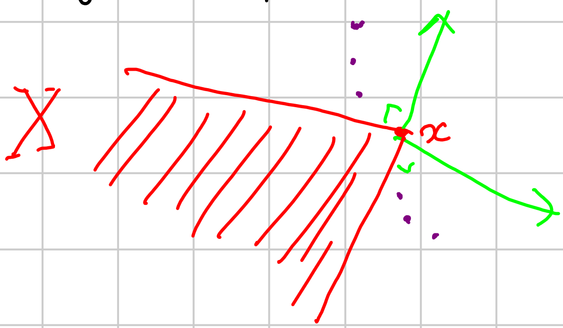
$\Rightarrow \partial X = \bigcup \{ X \cap \partial H : H$ semi-spazio di supporto$\}$.

Dim: $\supset$ ovvia:



$\subset$: sia $x \in \partial X$; prendo $(y_n) \subset \mathbb{R}^N \setminus X$ con $y_n \to x$; sia $x_n \in X$ il punto di X avente minima distanza da y_n; posso supporre

$$\frac{y_n - x_n}{\|y_n - x_n\|} \longrightarrow v \in S^{N-1}$$; ora



$$H = x + \{ z \in \mathbb{R}^N : \langle z \mid v \rangle \leq 0 \}$$

è un semi-spazio di supporto per X. $\boxtimes$

Def: chiamo politopo convesso in $\mathbb{R}^N$ l'inviluppo convesso di un numero finito di punti.

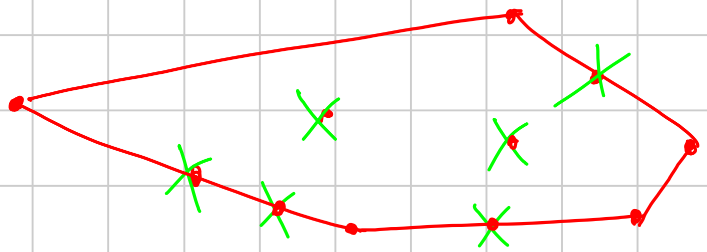
Oss: $\mathrm{Conv}(p_1, \dots, p_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i p_i : \sum_{i=1}^{k} t_i = 1,\ t_i \geq 0 \right\}$.

($\supset$: RHS contiene $p_1, \dots, p_k$ ed è convesso

$\subset$: per induzione su $\#\{i : t_i \neq 0\}$ provo che $\sum_{i=1}^{k} t_i p_i \in X$; $\# = 1$ ok ; $\# \geq 2 \Rightarrow$

$0 < t_1 < 1$ $\quad \sum_{i=1}^{k} t_i p_i = t_1 \cdot p_1 + (1-t_1) \cdot \sum_{i=2}^{k} \frac{t_i}{1-t_1} \cdot p_i$ _)

(Oss: $A \subset \mathbb{R}^N$, $\mathrm{Conv}(A) = \bigcap \{C \text{ convesso}, C \supset A\}$ _)



Prop: Dati $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ esiste un unico sottoinsieme minimale $\{v_1, \dots, v_h\} \subset \{p_1, \dots, p_k\}$ t.c. $\mathrm{Conv}(p_1, \dots, p_k) = \mathrm{Conv}(v_1, \dots, v_h)$. (vertici.)

Dim: noto che

$$p_1 \in \mathrm{Conv}(p_2, \dots, p_k) \iff \mathrm{Conv}(p_1, \dots, p_k) = \mathrm{Conv}(p_2, \dots, p_k)$$

(facile)

Ora partendo da $\{p_1, \dots, p_k\}$ scarto uno dopo l'altro un punto tolto il quale l'inviluppo convesso rimane uguale. Alla fine trovo

$\{v_1, \dots, v_h\}$ minimale con $\mathrm{Conv}(v_1, \dots, v_h) = \mathrm{Conv}(p_1, \dots, p_k)$
ed ho che $v_j \notin \mathrm{Conv}(v_1, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_h)$ $\forall j$.

Per l'unicità: sia $C = \mathrm{Conv}(v_1, \dots, v_h) = \mathrm{Conv}(p_1 \dots p_k)$.
Dico che $v_1, \dots, v_h$ sono caratterizzati da questa proprietà: non essere punto interno di un segmento con estremi distinti in C.

- v_1 non è punto interno ... : p.a.

$v_1 = \lambda \cdot q_0 + (1-\lambda) \cdot q_1 \qquad 0 < \lambda < 1, \quad q_0, q_1 \in C, \; q_0 \neq q_1$

$$v_1 = s \cdot \sum_{i=1}^{h} t_i v_i + (1-s) \sum_{i=1}^{h} r_i v_i$$

q_0 e q_1 non sono entrambi v_1 $\Rightarrow t_1 < 1$ o $r_1 < 1$

$\Rightarrow s \cdot t_1 + (1-s) \cdot r_1 < 1$

$$\Rightarrow v_1 = \sum_{i=2}^{h} \frac{s t_i + (1-s) r_i}{1 - (s t_1 + (1-s) r_1)} \cdot v_i$$

è comb. convessa $\sum_{i=2}^{h} (s t_i + (1-s) r_i) = s(1-t_1) + (1-s)(1-r_1)$

$= \cancel{s} - s t_1 + 1 - \cancel{s} - (1-s) r_1$

$= 1 - (s t_1 + (1-s) r_1)$.

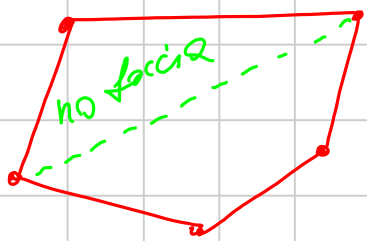
•) Se $x \in C_1$ non è uno dei v_j allora è punto interno di un segmento . . .

$$x = \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \qquad \text{posso supporre } 0 < t_1 < 1$$

$$\Rightarrow x = \underset{\underset{C}{\cap}}{t_1 \cdot v_1} + (1-t_1) \cdot \underset{\underset{C}{\cap}}{\sum_{i=2}^{n} \frac{t_i}{1-t_1} \cdot v_i} .$$

$\boxtimes$

Def: chiamo faccia di X politopo convesso $X \cap \partial H$ con H semispazio di supporto per X.



Oss: ogni faccia è un politopo convesso.

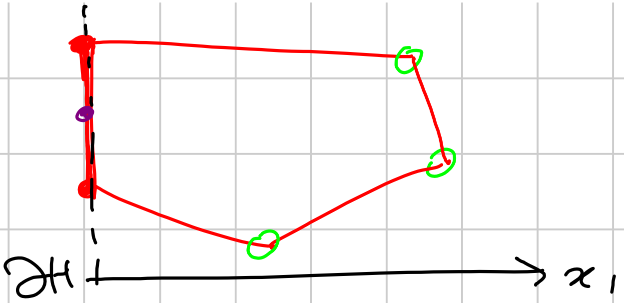
Basta provare che se $Y = X \cap \partial H$ allora $Y = \mathrm{Conv}(\text{vertici di } X \text{ contenuti in } \partial H)$.

Scelgo coordinate $x_1, \dots, x_N$ t.c. $H = \{x_1 \geq 0\}$ $\quad X \subset \{x_1 \geq 0\}$

$x = \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \in \partial H$

$\iff x_1\left(\sum_{i=1}^{n} t_i v_i\right) = 0 \iff t_j = 0 \ \forall j$ t.c. $x_1(v_j) > 0$

$\iff x$ è comb. convessa dei vertici di X in ∂H. $\boxed{\text{VI}}$

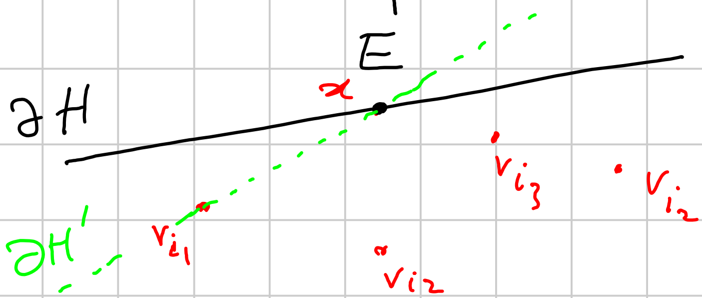


Prop: X politopo convesso $\Rightarrow$ ∂X unione delle facce di codimensione 1.

Dim: $x \in \partial X$. Per il fatto generale sui convessi esiste H semispazio di supporto con $x \in \partial H$ (X è chiuso perché intersezione di

$$\{t \in \mathbb{R}^n : t_i \geq 0,\ \textstyle\sum t_i = 1\} \longrightarrow \mathbb{R}^N$$
$$\textstyle\sum t_i \longmapsto \sum t_i v_i \ .)$$

Considero $X \cap \partial H$ è faccia; se ha codimensione almeno 2 esiste $E \subset \partial H$ stsp. affine di codim 1 in ∂H (cioè 2 in $\mathbb{R}^n$) t.c. $X \cap \partial H \subset E$. Ora proietto su $E^\perp$ (dim $= 2$)



Ruoto ∂H intorno a E fino a incontrare un vertice che non sta in E : trovo H' con $\dim(\partial H' \cap X) > \dim(\partial H \cap X)$. Continuo. $\boxtimes$

Orientazione di un politopo X
= orientazione per $S(X)$

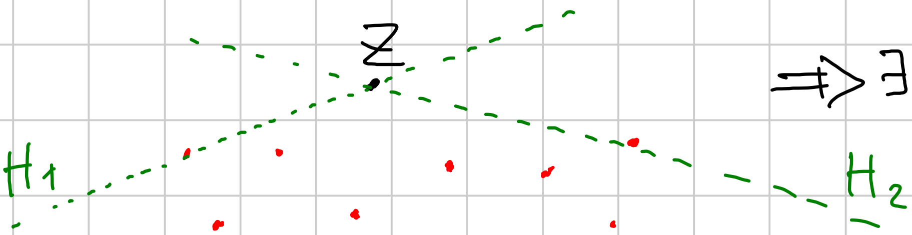
Orientazione indotta da X su una faccia Y di codimensione 1 : prendo v esterno a X lungo Y su $S(X)$ e dico che $u_2 \dots u_m$ base di $S(Y)$ è positiva se $v, u_2, \dots, u_m$ è positiva in $S(X)$.

Prop: se Z è faccia di codim 2 di X, esistono esattamente 2 facce di X di codim 1 che contengono Z; se sono Y_1 e Y_2 allora le orientazioni

$$X \rightsquigarrow Y_1 \rightsquigarrow Z$$
$$X \rightsquigarrow Y_2 \rightsquigarrow Z$$

sono opposte tra loro.

Dim: $S(Z)$ ha codim. 2; in $S(Z)^\perp$ ho



$\Rightarrow \exists!\ Y_1, Y_2$

Orientazione: come per i simplessi.

Def: K complesso politopale è un insieme finito di politopi convessi in $\mathbb{R}^N$ t.c.

1) se $X \in K$ e Y è faccia di X allora $Y \in K$

2) se $X_1, X_2 \in K$, $X_1 \cap X_2$ è faccia comune.

Cor: $C_n(K)$ gruppo libero generato da $K^{[n]}$ (ciascuno con fissata arbitraria orientazione)

$$\partial_n(X) = \sum_{Y \in K^{[n-1]},\ Y \subset X} \varepsilon(X,Y) \cdot Y$$

$\Rightarrow$ ho complesso di catene $\Rightarrow H_n(K) = Z_n(K) / B_n(K)$

Oss: anche per complessi politopali ho la nozione di suddivisione con (i)–(iv)

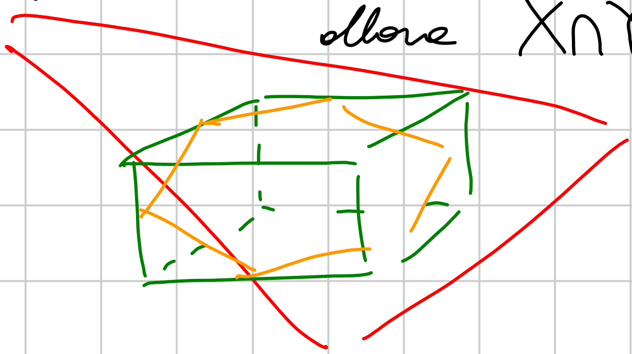
$\Rightarrow$ se L suddivide K allora $H_n(L) \cong H_n(K)$.

(devo rivedere la dimo della surgettività).

Teo 3': se K, L sono complessi politopali con $|K| = |L|$ allora hanno una suddivisione comune.

(Ciò implica che $H_n(K)$ dipende / isomorfismo solo da $|K|$ sia per K politopali che simpliciale.)

Prop (chiave): se X e Y sono politopi convessi allora $X \cap Y$ lo è.



(Esercizio: provare che i vertici di $X \cap Y$ sono esattamente $\left\{ X_1 \cap Y_1 : \begin{array}{l} X_1 \subset X \text{ faccia} \\ Y_1 \subset Y \text{ faccia} \\ X_1 \cap Y_1 = \text{punto} \end{array} \right\}$

Il teo 3' segue subito: se $|K| = |L|$

$I = \{ X \cap Y : X \in K, Y \in L \}$ è complesso politopale che suddivide K e L

La prop chiave segue:

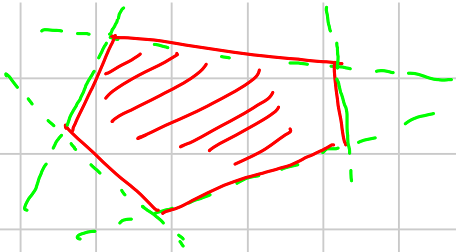
Prop: $X \subset \mathbb{R}^N$; X politopo convesso
$\iff$ limitato ed è intersezione di una famiglia *finita* di semispazi

Dim: $\underline{\Longrightarrow}$, Noto che basta dimostrarlo nel caso in cui $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^N}(X) \neq \emptyset$ (cioè $S(X) = \mathbb{R}^N$); infatti sapendo ciò ho

$X = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$ con $H_i \subset S(X)$ semi-spazio ;
ora scelgo $\tilde{H}_i \subset \mathbb{R}^N$ semi-spazio con $\tilde{H}_i \cap S(X) = H_i$,
e semispazi $K_1 \dots K_q$ di $\mathbb{R}^N$ con $S(X) = K_1 \cap \dots \cap K_q$
$\Longrightarrow X = \tilde{H}_1 \cap \dots \cap \tilde{H}_p \cap K_1 \cap \dots \cap K_q$.

Ora $S(X) = \mathbb{R}^N$. Siano $Y_1, \dots, Y_p$ le facce di codimensione 1 di X ; $Y_j = X \cap \partial H_j$ con H_j di supporto.

Affermo che $X = \bigcap_{j=1}^{p} H_j$.

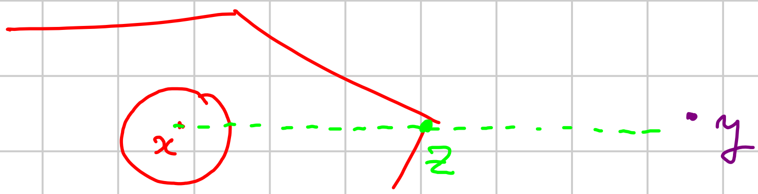


$X \subset \bigcap H_i$ ovvio

Viceversa: $y \notin X$

Scelgo $x \in \mathrm{int}(X)$

$\Longrightarrow [x,y]$ contiene al suo interno uno e un solo punto z di ∂X



Facendo variare x nel suo intorno si evita l'intersezione con qualsiasi stsp. di codim 2 $\Rightarrow$ anche con un numero finito $\Rightarrow$ si evita intersezione con facce di codim 2 $\Rightarrow$ posso supporre che $z \in \mathrm{int}(Y_j)$

$\Rightarrow y \notin H_j \Rightarrow y \notin \bigcap H_i$. $\Rightarrow$ ✓