UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 19/7/14 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Se in $W = \{y \in \mathbb{R}^5 :\ 5y_1 + 2y_2 - 9y_3 - 8y_4 + 2y_5 = 0\}$ sono dati 4 vettori non nulli, si può concludere che essi sono una base di V? Spiegare.

2. Se $f : \mathbb{C}^{11} \to \mathbb{C}^4$ è surgettiva e $W \subset \mathbb{C}^{11}$ è un sottospazio con $\dim(W \cap \mathrm{Ker}(f)) = 2$, che dimensione può avere W?

3. Data la base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ di $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_3 = x_1 + x_2\}$,

posto $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_2 \\ -2x_2 + x_3 \\ -x_1 + 4x_3 \end{pmatrix}$ trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

4. Data $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{2\,3}$.

5. Calcolare i determinanti delle orlate di $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 3 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Per i numeri complessi $z_1 = 7 + 3i$ e $z_2 = 5 + 4i$ considerare i moduli ρ_1, ρ_2 e gli argomenti ϑ_1, ϑ_2 scelti nell'intervallo $[0, 2\pi)$. Stabilire quale sia maggiore tra ρ_1 e ρ_2, e quale sia maggiore tra ϑ_1 e ϑ_2.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

calcolare la proiezione su X di $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Al variare di $s \in \mathbb{R}$ considerare il sistema $\begin{cases} (s+2)x - 2y + z + (s+3)w = -1 \\ 3x + (s-1)y - 2z + 4w = -s-1 \\ 5x + (s-7)y + 4z + (s+4)w = 1. \end{cases}$

(A) (3 punti) Risolvere il sistema per $s = 0$.

(B) (3 punti) Trovare il sottospazio W di giacitura dell'insieme delle soluzioni per $s = 1$; inoltre, posto $Z = \mathrm{Span}(e_1,\ e_2,\ e_4)$, trovare la matrice della proiezione su Z relativa alla decomposizione $\mathbb{R}^4 = W \oplus Z$.

(C) (3 punti) Trovare l'unico valore s_0 di s per il quale l'insieme delle soluzioni non è una retta.

(D) (3 punti) Risolvere il sistema per $s = s_0$.

2. In $\mathbb{R}^4$ considerare $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
e porre $X = \mathrm{Span}(v_1,\ v_2,\ v_3)$, $Y = \mathrm{Span}(v_1,\ v_2)$, $Z = \mathrm{Span}(v_3)$.

(A) (1 punto) Provare che $\mathcal{B} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ è una base di X.

(B) (3 punti) Provare che $v = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 19 \\ 8 \end{pmatrix}$ appartiene a X e trovare $[v]_{\mathcal{B}}$.

(C) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di X.

(D) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di Y.

(E) (2 punti) Trovare equazioni cartesiane di Z.

Risposte

5. ♡

1. No; se sono linearmente indipendenti oppure se generano allora sono automaticamente una base, ma possono non esserlo (ad esempio se si tratta del vettore $9e_1 + 5e_3$ ripetuto 4 volte)

2. Tra 2 e 6 compresi

3. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$

4. $\frac{1}{7}$

5. -71 e 91

6. $\rho_1 > \rho_2$, $\vartheta_2 > \vartheta_1$

7. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -23 \\ 67 \\ 34 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

(B) $W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $s_0 = 2$

(D) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

2.

(A) I vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti.

(B) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

(C) $18x + y + 5z - 4w = 0$

(D) $\begin{cases} 14x - 3y + 5z = 0 \\ -17y + 5z + 14w = 0 \end{cases}$

(E) $\begin{cases} 3x + z = 0 \\ 3y + 5z = 0 \\ 3w + 2z = 0 \end{cases}$