



Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Trovare $s, t \in \mathbb{R}$ tali che posto $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix} \right)$ si abbia $\left[\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. Dati 3 vettori linearmente indipendenti in $\left\{ x \in \mathbb{R}^9 : \sum_{j=1}^9 (2j+1)x_j = \sum_{j=1}^9 (3j-1)x_j = 0 \right\}$, quanti bisogna aggiungerne per ottenere una base?
3. Se X e Y sono sottospazi vettoriali di \mathbb{C}^{13} di dimensioni 7 e 9, che dimensione può avere $X \cap Y$?
4. Discutere quante sono al variare di $t \in \mathbb{R}$ le soluzioni di $\begin{cases} (t+5)x - (t+1)y = 4 \\ (9-5t)x + (2t-3)y = -t. \end{cases}$
5. Data $M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ con $\det(M) = 5$, quanto vale $\det(3 \cdot M)$?
6. Date la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ e la sua sottomatrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, calcolare i determinanti di tutte le orlate di B in A .
7. Calcolare la proiezione su X di $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ dove $X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 6x + 5y - 2z = 0 \right\}$ e $Y = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Considerare $U = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0\}$ e

$$V = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3.$$

(A) (4 punti) Trovare la base \mathcal{A} di U del tipo $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j \\ h \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \right)$ con a, b, c interi primi fra loro, j, h, k interi primi fra loro, $a > 0$ e $j > 0$.

(B) (1 punto) Provare che i vettori assegnati come generatori di V ne costituiscono una base \mathcal{B} .

(C) (2 punti) Trovare un'equazione cartesiana per V

(D) (1 punto) Provare che $u_1 = \begin{pmatrix} -23 \\ 7 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 34 \\ 3 \\ 23 \end{pmatrix}$ appartengono a U .

(E) (4 punti) Data $g : U \rightarrow V$ lineare con $[g]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ calcolare $g(u_1)$ e $g(u_2)$

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tali che

$$f \begin{pmatrix} t-7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 2 \\ t+1 \\ 1-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} t-6 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ t-1 \end{pmatrix}.$$

(A) (5 punti) Al variare di t stabilire quante tali f esistono.

(B) (3 punti) Trovare il valore di t per cui f esiste ed è unica ma non è iniettiva.

(C) (4 punti) Per $t = 2$ calcolare $f^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.



Risposte

5. ♥

1. $s = -2, t = 7$

2. $(9 - 2) - 3 = 4$

3. Tra 3 e 7 compresi

4. Infinite per $t = 3$, nessuna per $t = \frac{2}{3}$, una altrimenti

5. 45

6. 102 e -61

7. $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -15 \\ 22 \\ 10 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



Soluzioni

1.

$$(A) \mathcal{A} = \left(\left(\begin{pmatrix} 34 \\ 0 \\ -39 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \right) \right)$$

(B) Non sono proporzionali fra loro

$$(C) 29y_1 - 17y_2 + 37y_3 = 0$$

(D) Soddisfano le equazioni di U

$$(E) -\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 25 \\ 232 \\ 87 \end{pmatrix}, \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 263 \\ -657 \\ -508 \end{pmatrix}$$

2.

(A) Infinite per $t = 6$, nessuna per $t = 3$, una sola altrimenti

$$(B) t = \frac{7}{4}$$

$$(C) \begin{pmatrix} -8 \\ 124 \\ 5 \end{pmatrix}$$