



Nome \_\_\_\_\_ Cognome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

1. Trovare  $s, t \in \mathbb{R}$  tali che posto  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 3 \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix} \right)$  si abbia  $\left[ \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

2. Dati 3 vettori linearmente indipendenti in  $\left\{ x \in \mathbb{R}^9 : \sum_{j=1}^9 (2j+1)x_j = \sum_{j=1}^9 (3j-1)x_j = 0 \right\}$ , quanti bisogna aggiungerne per ottenere una base?

3. Se  $X$  e  $Y$  sono sottospazi vettoriali di  $\mathbb{C}^{13}$  di dimensioni 7 e 9, che dimensione può avere  $X \cap Y$ ?

4. Discutere quante sono al variare di  $t \in \mathbb{R}$  le soluzioni di  $\begin{cases} (t+5)x - (t+1)y = 4 \\ (9-5t)x + (2t-3)y = -t. \end{cases}$

5. Data  $M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  con  $\det(M) = 5$ , quanto vale  $\det(3 \cdot M)$ ?

6. Date la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$  e la sua sottomatrice  $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ , calcolare i determinanti di tutte le orlate di  $B$  in  $A$ .

7. Calcolare la proiezione su  $X$  di  $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$  rispetto alla decomposizione  $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$  dove  $X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 6x + 5y - 2z = 0 \right\}$  e  $Y = \text{Span} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

---

### Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

---

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇

---



1. Considerare  $U = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0\}$  e

$$V = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3.$$

(A) (4 punti) Trovare la base  $\mathcal{A}$  di  $U$  del tipo  $\mathcal{A} = \left( \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j \\ h \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \right)$  con  $a, b, c$  interi primi fra loro,  $j, h, k$  interi primi fra loro,  $a > 0$  e  $j > 0$ .

(B) (1 punto) Provare che i vettori assegnati come generatori di  $V$  ne costituiscono una base  $\mathcal{B}$ .

(C) (2 punti) Trovare un'equazione cartesiana per  $V$

(D) (1 punto) Provare che  $u_1 = \begin{pmatrix} -23 \\ 7 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 34 \\ 3 \\ 23 \end{pmatrix}$  appartengono a  $U$ .

(E) (4 punti) Data  $g : U \rightarrow V$  lineare con  $[g]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  calcolare  $g(u_1)$  e  $g(u_2)$

2. Al variare di  $t \in \mathbb{R}$  considerare le applicazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tali che

$$f \begin{pmatrix} t-7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 2 \\ t+1 \\ 1-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} t-6 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ t-1 \end{pmatrix}.$$

(A) (5 punti) Al variare di  $t$  stabilire quante tali  $f$  esistono.

(B) (3 punti) Trovare il valore di  $t$  per cui  $f$  esiste ed è unica ma non è iniettiva.

(C) (4 punti) Per  $t = 2$  calcolare  $f^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ .



## Risposte

5. ♥

1.  $s = -2, t = 7$

2.  $(9 - 2) - 3 = 4$

3. Tra 3 e 7 compresi

4. Infinite per  $t = 3$ , nessuna per  $t = \frac{2}{3}$ , una altrimenti

5. 45

6. 102 e  $-61$ 

7.  $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -15 \\ 22 \\ 10 \end{pmatrix}$

---

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇

---



## Soluzioni

1.

$$(A) \mathcal{A} = \left( \left( \begin{pmatrix} 34 \\ 0 \\ -39 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \right) \right)$$

(B) Non sono proporzionali fra loro

$$(C) 29y_1 - 17y_2 + 37y_3 = 0$$

(D) Soddisfano le equazioni di  $U$ 

$$(E) -\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 25 \\ 232 \\ 87 \end{pmatrix}, \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 263 \\ -657 \\ -508 \end{pmatrix}$$

2.

(A) Infinite per  $t = 6$ , nessuna per  $t = 3$ , una sola altrimenti

$$(B) t = \frac{7}{4}$$

$$(C) \begin{pmatrix} -8 \\ 124 \\ 5 \end{pmatrix}$$