



Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Trovare $s, t \in \mathbb{R}$ tali che posto $\mathcal{B} = \left(\left(\begin{smallmatrix} s \\ -5 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix} \right) \right)$ si abbia $\left[\left(\begin{smallmatrix} 10 \\ t \end{smallmatrix} \right) \right]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix} \right)$.

2. Dati 11 generatori di $\left\{ x \in \mathbb{R}^8 : \sum_{j=1}^8 (2j-1)x_j = \sum_{j=1}^8 (3j+1)x_j = 0 \right\}$,
quanti bisogna scartarne per ottenere una base?

3. Se X e Y sono sottospazi vettoriali di \mathbb{C}^{12} di dimensioni 8 e 9, che dimensione può avere $X \cap Y$?

4. Discutere quante sono al variare di $t \in \mathbb{R}$ le soluzioni di $\begin{cases} (t+1)x + (3t-2)y = 3-2t \\ (1-t)x + (t-10)y = 3. \end{cases}$

5. Data $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ con $\det(A) = 7$, quanto vale $\det(2 \cdot A)$?

6. Date la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ e la sua sottomatrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$,
calcolare i determinanti di tutte le orlate di B in A .

7. Calcolare la proiezione su X di $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$
dove $X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 5x + 6y - 2z = 0 \right\}$ e $Y = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 5x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\}$ e

$$Y = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3.$$

(A) (4 punti) Trovare la base \mathcal{B} di X del tipo $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j \\ h \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \right)$ con a, b, c interi primi fra loro, j, h, k interi primi fra loro, $a > 0$ e $j > 0$.

(B) (1 punto) Provare che i vettori assegnati come generatori di Y ne costituiscono una base \mathcal{C} .

(C) (2 punto) Trovare un'equazione cartesiana per Y .

(D) (1 punto) Provare che $v_1 = \begin{pmatrix} -23 \\ 27 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 34 \\ 23 \end{pmatrix}$ appartengono a X .

(E) (4 punti) Data $f : X \rightarrow Y$ lineare con $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ calcolare $f(v_1)$ e $f(v_2)$

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tali che

$$f \begin{pmatrix} t-6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 2 \\ -t \\ t+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} t-5 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(A) (5 punti) Al variare di t stabilire quante tali f esistono.

(B) (3 punti) Trovare il valore di t per cui f esiste ed è unica ma non è iniettiva.

(C) (4 punti) Per $t = 1$ calcolare $f^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.



Risposte

5. \diamond

1. $s = 4, t = -9$

2. $11 - (8 - 2) = 5$

3. Tra 5 e 8 compresi

4. Infinite per $t = 4$, nessuna per $t = -\frac{1}{2}$, una altrimenti

5. 56

6. 174 e -51

7. $-\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 28 \\ 1 \\ 73 \end{pmatrix}$

1. \spadesuit 2. \heartsuit 3. \spadesuit 4. \clubsuit 5. \diamond 6. \spadesuit 7. \clubsuit 8. \heartsuit 9. \clubsuit 10. \diamond



Soluzioni

1.

$$(A) \mathcal{B} = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 34 \\ -39 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \right)$$

(B) Non sono proporzionali fra loro

$$(C) 37y_1 - 17y_2 + 29y_3 = 0$$

(D) Soddisfano le equazioni di X

$$(E) \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -100 \\ -59 \\ 93 \end{pmatrix}, \frac{5}{39} \begin{pmatrix} 31 \\ 105 \\ 22 \end{pmatrix}$$

2.

(A) Infinite per $t = 5$, nessuna per $t = 2$, una sola altrimenti

$$(B) t = \frac{3}{4}$$

$$(C) \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 124 \end{pmatrix}$$