UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto dell'8/1/14 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Dati 9 generatori di $\{p(t) \in \mathbb{C}_{\leqslant 6}[t] : \; p(1) = 0, \; p'(i) = 0\}$,
quanti bisogna scartarne per ottenere una base?

2. Data la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ di $\mathbb{R}^2$, trovare v_2 sapendo che $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e che $\left[\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Trovare $z \in \mathbb{C}$ tale che $\det \begin{pmatrix} 1 & -z & i \\ 0 & -1 & 1 \\ -i & 0 & i \end{pmatrix} = 0$.

4. Se $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$ è lineare e $7e_1 - e_2 + e_4 \notin \mathrm{Im}(f)$, che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(f)$?

5. Risolvere $\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + 3z = 10 \\ -x + 4y + 5z = -9. \end{cases}$

6. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{23}$.

7. Calcolare la proiezione di $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ su X rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$

dove $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare il sottospazio $X = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0\}$. Porre inoltre

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ -1 & -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Esibire tutti i vettori di X con due sole coordinate non nulle, intere e prime fra loro, di cui positiva quella con indice minore.

(B) (3 punti) Ordinare i vettori precedenti in modo che sia crescente la quantità $x_1+2x_2+3x_3+4x_4$, ed estrarre dai vettori così ordinati una base $\mathcal{B}$ di X.

(C) (3 punti) Provare che la formula $f(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione lineare $f : X \to X$.

(D) (3 punti) Trovare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

2. In $\mathbb{R}^4$ considerare i sottospazî affini $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ ed

$$F : \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4 = -6. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di E.

(B) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di F.

(C) (3 punti) Determinare la posizione reciproca di E ed F e quella delle loro giaciture, deducendone il calcolo della dimensione di $E + F$.

(D) (3 punti) Determinare $t \in \mathbb{R}$ tale che $E + (t \cdot e_2 + F) \neq \mathbb{R}^4$.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. 4

2. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. $z = 1 + i$

4. Tra 4 e 7 compresi

5. $x = 2,\ y = -3,\ z = 1$

6. $\frac{1}{5}$

7. $-\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$

---

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

(B) L'ordinamento è il precedente, e bisogna scartare terzo, quinto e sesto vettore

(C) Se $\omega = (2, 6, -3, 4)$ si ha $\omega \cdot A = -9\omega$

(D) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

2.

(A) $\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 - 11x_3 = 27 \\ 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$

(C) E ed F sono disgiunti mentre le loro giaciture si intersecano in una retta, dunque $E + F$ ha dimensione $1 + (2 + 2 - 1) = 4$, ovvero $E + F = \mathbb{R}^4$

(D) $t = -\frac{31}{5}$