Algebra Lineare - 30/10/13

$f: V \to W$ lin. $\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(V)$.

<u>Fatto</u>: esistono $f: V \to W$ lineari bijettive se e solo se $\dim(V) = \dim(W)$.

<u>Cor</u>: se $\dim(V) = \dim(W)$ allora $f: V \to W$ lin.
f iniettiva $\Leftrightarrow f$ surgettiva.

Dim: Sia $n = \dim V = \dim W$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$; dunque

$$
\begin{array}{ccc}
\dim(\operatorname{Ker} f) = 0 & \Longleftrightarrow & \dim(\operatorname{Im} f) = n \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
f \text{ iniettiva} & & f \text{ surgettiva}
\end{array}
$$

$\square$

Es: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f = f_A$, $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Per vedere che f è bigettiva (invertibile) basta vedere che è iniettiva, cioè $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$:

$A \cdot x = 0 \iff \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 = 0 \\ -5x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 41 x_1 = 0 \\ \dots \end{cases} \iff x = \underline{0}$

Sì.

$\mathcal{L}(V,W) = \{ f : V \to W \text{ lineari} \}$ sp. vett.

Prop: l'applicazione

$$J_{m,n} : M_{m \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$
$$A \longmapsto f_A$$

è lineare bigettiva.

("Dunque lo spazio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ delle appl. lin $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ".)

<u>Dim</u>: lineare: $J_{m,n}(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \overset{?}{=} \lambda_1 J_{m,n}(A_1) + \lambda_2 J_{m,n}(A_2)$

$f_{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2} \overset{?}{=} \lambda_1 f_{A_1} + \lambda_2 f_{A_2}$ (uguaglianza tra funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

$f_{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}(x) \overset{?}{=} \left(\lambda_1 f_{A_1} + \lambda_2 f_{A_2}\right)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\quad \| \qquad\qquad\qquad \|$

$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)\cdot x \qquad\qquad \lambda_1 f_{A_1}(x) + \lambda_2 f_{A_2}(x)$

$\qquad\ \ \|\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$\lambda_1 A_1 \cdot x + \lambda_2 A_2 \cdot x \qquad\qquad \lambda_1 A_1 x + \lambda_2 A_2 x.$ ✓

<u>Iniettiva</u>: $Ker(T_{m,n}) \overset{?}{=} \{0\}$

$$T_{m,n}(A) = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} A = 0$$

$$f_A = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} A = 0$$

$$A \cdot x = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \overset{?}{\Longrightarrow} A = 0$$

Sì: $A \cdot e_j$ = j-esima colonna di A _

__Surgettive__ : $\forall f \ \exists A$ t.c. $f = f_A$ (ovvi). $\blacksquare$

Avendo $J_{m,n} : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lin bij.
$$A \longmapsto f_A$$

scriviamo $f_A = A$; dunque per $A \in M_{m\times n}$
indichiamo ancora con $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$$x \longmapsto A \cdot x.$$

__Cor__ : $\dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) = n \cdot m.$

Siano ora V, W sp. vett. di dimensioni n e m.
"Cos'è $\mathcal{L}(V,W)$?" Scelgo basi

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di V, $\quad \mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ di W

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$\Phi_{\mathcal{B}}(v) = [v]_{\mathcal{B}}$

$\Phi_{\mathcal{C}}(w) = [w]_{\mathcal{C}}$

Prop: L'applicazione

$$\Psi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} : \mathcal{L}(V,W) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$$
$$f \longmapsto \phi_{\mathcal{C}} \circ f \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}$$

è lineare bijettiva. (Esercizio.)

Cor: $J_{m,n} \circ \Psi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} : \mathcal{L}(V,W) \to M_{m\times n}(\mathbb{R})$

è lineare bijettiva.

"Usando basi di V e W si identifica $\mathcal{L}(V,W)$ con $M_{m\times n}(\mathbb{R})$."

Cor: $\dim(\mathcal{L}(V,W)) = n \cdot m$.

Def: Date $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V

$\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ base di W

$f: V \to W$ lineare, chiamo

matrice associata ad f rispetto a $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{C}$ in arrivo, indicata con $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, la matrice $A \in M_{m \times n}$ t.c.

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i .$$

Cioè:

Per trovare $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$:

- prendo j-esimo elemento di $\mathcal{B}$ (base partenza)
- applico f
- trovo le coordinate rispetto a $\mathcal{C}$ (base arrivo)
- le scrivo nella j-esima colonna.

<u>Es:</u> $V = \{ x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \}$

$W = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$

$f : V \to W \qquad f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}$

(f è la restrizione a V e l'abbreviazione a W della appl. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata a $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.)

$$\mathcal{B} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} \right), \quad \mathcal{C} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{w_2} \right)$$

$$[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -52/5 & 51/5 \\ -23/5 & 19/5 \end{pmatrix}$$

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{52}{5} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{w_1} - \frac{23}{5} \underbrace{\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{w_2}$$

$$\begin{cases} 3\alpha + 7\beta = 1 \\ -\alpha + 4\beta = -8 \\ -2\alpha + 3\beta = 7 \end{cases}$$

$\text{II}: \alpha = 4\beta + 8$

$\text{III}: -5\beta = 23$

$\beta = -\frac{23}{5}$

$\alpha = -\frac{52}{5}$

vale anche la I ✓

$$f(v_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} = \frac{51}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{19}{5}\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

II: $\alpha = 4\beta - 5$ $\qquad \beta = \frac{19}{5} \qquad \alpha = \frac{51}{5}$

III $-5\beta = -19$ $\qquad$ Vale anche I

$$\frac{51}{5}\cdot 3 + \frac{19}{5}\cdot(-7) = \frac{1}{5}(153 - 133) = \frac{20}{5} = 4$$

Provo che $f \longmapsto [f]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$ è proprio

$J_{m,n} \circ \Psi^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$.

Prop: $[f(v)]_{\mathcal{C}} = [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$

Cioè: "La matrice associata a f agisce sulle coordinate come f agisce sui vettori (**solo** se uso le stesse basi)".

Dim: Sia $[v]_{\mathcal{B}} = x$ cioè $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$

sia $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = A$ cioè $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$

Devo vedere che $[f(v)]_{\mathcal{C}} = A \cdot x$:

$$f(v) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)}_{(A \cdot x)_i} \cdot w_i \Rightarrow [f(v)]_{\mathcal{C}} = A \cdot x. \quad \blacksquare$$

Oss: Se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\Rightarrow [f_A]^{\mathcal{E}^{(m)}}_{\mathcal{E}^{(n)}} = A \quad \text{(segue dai fatti visti).}$$

(Altro motivo per scrivere $f_A = A$.)

Es: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$

($f = f_A$ con $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.)

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right) \qquad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \end{pmatrix} = 119 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 32 \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 119 & -17 \\ 32 & -7 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -11 \end{pmatrix} = -17 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Esercitazioni

Esercizi 11/10/13

Es. 5

(c) vedo che w_1 e w_2 non sono uno un multiplo dell'altro $\Rightarrow$ sono lin. indip. $\Rightarrow$ sono una base di $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ $v \in \mathrm{Span}(w_1, w_2) = \mathbb{R}^2$ e si scrive in modo unico come comb. lin di w_1, w_2.

(d) osservo che w_1, w_2 sono lin. indip.

$\Rightarrow$ $\mathrm{Span}(w_1, w_2) = \mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3)$

$\Rightarrow$ w_1, w_2, w_3 generatori lin. dipendenti.

$\Rightarrow$ $v \in \mathrm{Span}(w_i)$, e non si scrive in modo unico.

Esercizio 6

(b) w_1, w_2 sono lin. ind. $\Rightarrow$ $\mathrm{Span}(w_1, w_2)$ ha $\dim = 2$ $\quad v \overset{?}{=} a \cdot w_1 + b w_2$

$$\begin{cases} 3a + 4b = 2 \\ -2a + b = -5 \\ a - 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a - 5 \\ a - 4a + 10 = 4 \\ 3a + 4b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow v = 2w_1 - w_2$$

$\Rightarrow v \in \mathrm{Span}(w_1, w_2)$, si scrive in modo unico.

(c) w_1, w_2 lin. indip., $\mathrm{Span}(w_1, w_2)$ ha dim. $= 2$

$$v = a w_1 + b w_2 \iff \begin{cases} 5a - 2b = 3 \\ a + 2b = 1 \\ 2a + 3b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 - 2b \\ 2 - 4b + 3b = -2 \\ 5a - 2b = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 4 \\ a = -7 \\ 5 \cdot (-7) - 2 \cdot 4 \neq 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il sistema non ha soluzioni

$\Rightarrow$ $v \notin \mathrm{Span}(w_1, w_2)$

(f) Sicuramente $w_1, \dots, w_4$ sono lin.

dip. perché $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Quindi <u>se</u> $v \in \mathrm{Span}(w_i)$, le scrittura non sarebbe unica.

- w_1 e w_2 sono lin. indip.

$w_3 \overset{?}{\in} \mathrm{Span}(w_1, w_2)$ $\qquad aw_1 + bw_2 \overset{?}{=} w_3$

$$\begin{cases} 4a + 0 \cdot b = 1 \\ a + 2 \cdot b = 0 \\ a \cdot 0 + b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1/4 \\ 1/4 + 2 \cdot 2 \neq 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \nexists$ Sol. $\Rightarrow w_3 \notin \mathrm{Span}(w_1, w_2)$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3) = \mathbb{R}^3 = \mathrm{Span}(w_i \, ; \, i=1,\dots,k)$

$\Rightarrow \quad \overset{\cup\!\!\!\!\!\!\!\!\;\;}{v}$

Esercizio 7

(c) w_1, w_2 lin. indipendenti

$v \overset{?}{\in} \mathrm{Span}(w_1, w_2)$

$a w_1 + b w_2 = 5a - at + 2at^2 - 2b - 2bt + 3bt^2$

$= (5a - 2b) + (-a - 2b)t + (2a + 3b)t^2$

$\overset{?}{=} 7 + t - t^2$

v

$$\begin{cases} 5a - 2b = 7 \\ -a - 2b = 1 \\ 2a + 3b = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 - 2b \\ -2 - 4b + 3b = -1 \\ 5a - 2b = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \\ 5 \cdot 1 + 2\,(+1) \overset{\checkmark}{=} 7 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad v = w_1 - w_2$$

$$\in \operatorname{Span}(w_1, w_2) \subseteq \operatorname{Span}(w_1, w_2, w_3)$$

Se $w_3 \in \operatorname{Span}(w_1, w_2)$ allora

$$\operatorname{Span}(w_1, w_2) = \operatorname{Span}(w_1, w_2, w_2)$$

$w_3 \in \mathrm{Span}(w_1, w_2) \iff$

$$\begin{cases} 5a - 2b = 1 \\ -a - 2b = -5 \\ 2a + 3b = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 5 - 2b \\ 10 - 4b + 3b = 8 \\ 5a - 2b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \\ 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \overset{\checkmark}{=} 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad w_3 \in \mathrm{Span}(w_1, w_2) \checkmark$$

$\Rightarrow$ v non si scrive in modo unico (i w_i sono gen. lin. dip.)

(d) w_1, w_2 indipendenti

$$w_3 = 3t - t^2 \overset{?}{=} a(1+t) + b(1-t+t^2).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 3 \\ b = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -1 \\ a = 2 \\ 2 + (-1) \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $w_3 \notin \mathrm{Span}(w_1, w_2)$ $\Rightarrow$

w_1, w_2, w_3 lin. indip. $\Rightarrow$ $\mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3)$ ha dim $= 3$. Ma $w_i \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$, $i = 1, 2, 3$

$\Rightarrow \text{Span}(w_i)$ è un s.s. di $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$,
che ha dim $= 3 \Rightarrow$

$$\text{Span}(w_1, w_2, w_3) = \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$$

Ma $v = 2t^2 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \Rightarrow v \in \text{Span}(w_i)$
e la scrittura è unica.

<u>Esercizio 8</u>

(a) w_1, w_2 indipendenti

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} a \cdot \overset{w_1}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} + b \overset{w_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad = \begin{pmatrix} 2a+b & 0 \\ a & -a+2b \end{pmatrix}$$

Span (w_i) ha dim. 3

$$v = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \overset{?}{=} a \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + b = 2 \\ c = 3 \\ a - c = -1 \\ -a + 2b = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a = 2 \\ b = -2 \\ -2 - 4 \neq 7 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad v \notin \mathrm{Span}(w_i)$

(b) $\mathrm{Span}(w_i)$ ha dim. 3

e $\quad v \in \mathrm{Span}(w_i) \Rightarrow$ scrittura unica

Esercizi 18/10/13.

Esercizio 1

(a) $W = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \}$

$w_i \in W$, $i = 1, 2, 3$ (le loro coordinate soddisfano l'equazione).

$x_1 = -3x_2 + 2x_3 \implies$

$W = \{(-3x_2 + 2x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

Oss.: $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$ e sono

lin. indip.: $a \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + 2b \\ a \\ b \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a = b = 0$

$$\Rightarrow \quad x_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_2 + 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ generano W

$\Rightarrow \quad \dim W = 2$

w_1, w_2 sono lin. indip. $\Rightarrow$

$\mathrm{Span}(w_1, w_2) = W = \mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3)$

$\Rightarrow$ ogni $w \in W$ non ha scrittura unica

(e) $W = \{ x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \}$

$x_4 = x_1 + 3x_2 + x_3$

$W = \{ (x_1, x_2, x_3, x_1 + 3x_2 + x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ base di W

$\Rightarrow \dim W = 3$

$\Rightarrow w_1, w_2$ <u>non</u> sono generatori di W

(g) $W = \{ x \in \mathbb{R}^4 \; x_3 = x_1 - 2x_2 \, , \, x_4 = 3x_1 + 2x_2 \}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ lin. indip. e $\in W$

$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 - 2x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$ vettore qualunque di W

$\Rightarrow$ ho trovato una base di W

$\Rightarrow \dim W = 2$

w_1, w_2 sono indip. $\Rightarrow$
w_1, w_2, w_3 sono generatori di W
$\dim W = 2 \Rightarrow w_1, w_2, w_3$ lin. dip.
$\Rightarrow$ ogni $w \in W$ <u>non</u> ha scrittura unica.

<u>Esercizio 2</u>

(a) $7x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \iff$

$$x_3 = \frac{7}{4}x_1 + \frac{5}{4}x_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5/4 \end{pmatrix} \text{. base di } W$$

(b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ -4x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \iff$

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_3 = 0 \Rightarrow x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{19}{11}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{41}{11}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{19}{11}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{41}{11}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow W = \left\{ \left(\frac{19}{11} \cdot x_3 , \frac{41}{11} \cdot x_3 , x_3 \right) : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{Span}\left(\frac{19}{11}, \frac{41}{11}, 1 \right).$$