Algebra Lineare - 29/10/13

$Z, W \subset V \quad \dim Z + \dim W = \dim(Z \cap W) + \dim(Z+W)$

Cor:
- $\dim(Z) + \dim(W) > \dim(V) \Rightarrow Z \cap W \neq \{0\}$

  Es: $Z, W \subset \mathbb{R}^7 \quad \dim(Z) = 5, \dim(W) = 4$

  $\Rightarrow Z \cap W \neq \{0\} \quad (\dim(Z \cap W) \geq 2)$
- $\dim(Z) + \dim(W) < \dim(V) \Rightarrow Z + W \subsetneq V$

  Es: $Z, W \subset \mathbb{R}^9, \dim(Z) = 4 \quad \dim W = 3$

$\Rightarrow Z+W \neq \mathbb{R}^9$ $\quad (\dim(Z+W) \leq 7)$

- $\dim(Z)+\dim(W) \leq \dim(V)$

  $\Rightarrow$ è possibile che $Z \cap W = \{0\}$

- $\dim(Z)+\dim(W) \geq \dim(V)$

  $\Rightarrow$ è possibile che $Z+W=V$

- Se $\dim(Z)+\dim(W)=\dim(V)$ si ha

  $Z \cap W = \{0\} \Leftrightarrow Z+W=V$

(In tal caso scriviamo $V = Z \oplus W$.)

somma diretta

— o —

$f: V \to W$ lineare se

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \quad \forall v_1, v_2, \ \forall \lambda_1, \lambda_2$$

<u>Oss</u>: 1) Se $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$ sono lineari

$\Longrightarrow$ $g \circ f$ è lineare

2) Se $f: V \to W$ è lineare e $Z \subset V$ sttsp

$\Longrightarrow$ $f|_Z : Z \to W$ è lineare

restrizione di f a Z

È la mappa $Z \to W$ che in ogni $x \in Z$ vale $f(x)$.

3) Se $f: V \to W$ è lineare, $Z \subset W$ sttsp e $f(V) \subset Z$ allora $g: V \to Z$, $v \mapsto f(v)$ è lineare.

abbreviazione di f a Z

$$\begin{pmatrix} F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ F(x) = x^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} G: \mathbb{R} \to [0, +\infty) \\ G(x) = x^2 \end{pmatrix}$$

Es: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + 4x_2 \\ x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$ lin

Noto che $\mathrm{Im}(f) \subset \{ y \in \mathbb{R}^3 : y_1 + y_2 + y_3 = 0 \} = X$

quindi ho un'applicazione $g : \mathbb{R}^2 \to X$

$$g(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

(ma $g \neq f$).

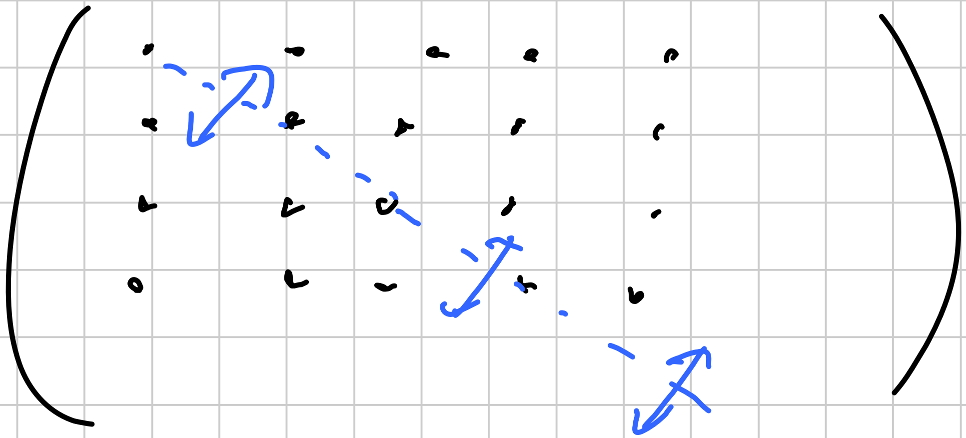
<u>Es</u>: $\mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$

$$A \longmapsto {}^tA$$

trasposta di A

$$({}^tA)_{ij} = (A)_{ji}$$

cioè ${}^tA$ si ottiene da A scambiando righe con colonne, ovvero con la simmetria



$$ {}^t\begin{pmatrix} 2 & 3 & -\sqrt{\pi} \\ 11 & -9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 3 & -9 \\ -\sqrt{\pi} & 4 \end{pmatrix} $$

è lineare; inoltre

$$ {}^t({}^tA) = A $$

($\Rightarrow$ la trasp. è invertibile).

Es: $tr : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$tr(A) = (A)_{11} + \dots + (A)_{nn}$ traccia

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$tr(A) =$ somma el.ti sulla diag. principale di A

diagonale principale

è lineare

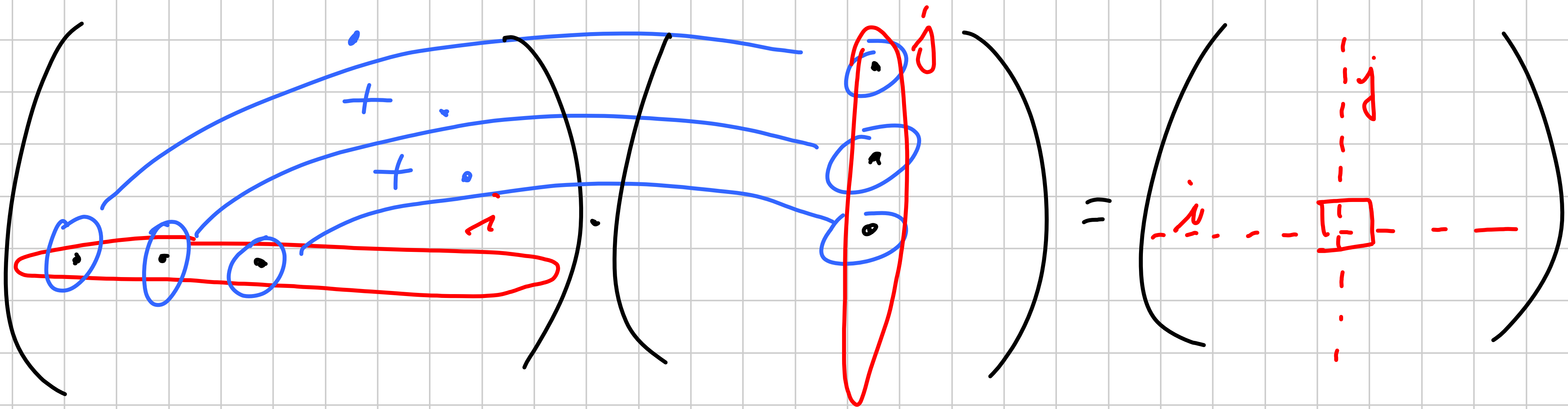
Es: $tr\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ \sqrt{\pi} & 17 & e \\ 9 & -41 & -8 \end{pmatrix} = 4 + 17 - 8 = 13$.

Def: Prodotto righe x colonne tra matrici

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times k}$$

$$(A \quad , \quad B) \longmapsto A\cdot B$$

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (A)_{il} \cdot (B)_{lj}$$



Es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ -1 & 4 & -9 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$2 \times 3 \quad \cdot \quad 3 \times 4$$

$4 + 33 + 4 = 41$

$$= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$-8 + 5 + 28 = 25$

Prop: Il prodotto righe per colonne è lineare in ciascun argomento fissato l'altro:

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \cdot B = \lambda_1 \cdot A_1 \cdot B + \lambda_2 \cdot A_2 \cdot B \quad \begin{pmatrix} \text{lin} \\ \text{a sx} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) = \lambda_1 \cdot A \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot A \cdot B_2 \quad \begin{pmatrix} \text{lin} \\ \text{a dx} \end{pmatrix}$$

cioè: fissata $B \in M_{n \times k}$ la

$$M_{m \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{m \times k}(\mathbb{R})$$
$$A \longmapsto A \cdot B$$

è lineare

fissata $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ la $\mathcal{M}_{n\times k} \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times k}$
è lineare $\qquad B \longmapsto A\cdot B$.

$\underline{\text{Dim}}$:
$$\underbrace{\underbrace{(\lambda_1 \underbrace{A_1}_{m\times n} + \lambda_2 \underbrace{A_2}_{m\times n})}_{m\times n} \cdot \underbrace{B}_{n\times k}}_{m\times k} \overset{?}{=} \underbrace{\lambda_1 \cdot \underbrace{\underbrace{A_1}_{m\times n} \cdot \underbrace{B}_{n\times k}}_{m\times k} + \lambda_2 \cdot \underbrace{\underbrace{A_2}_{m\times n} \cdot \underbrace{B}_{n\times k}}_{m\times k}}_{m\times k}$$

Resta da vedere che nel posto ij hanno stesso coeff:

$$((\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)_{il} \cdot (B)_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \left(\lambda_1 (A_1)_{il} + \lambda_2 (A_2)_{il}\right) \cdot (B)_{lj}$$

$$(\lambda_1 A_1 B + \lambda_2 A_2 B)_{ij} = \lambda_1 (A_1 \cdot B)_{ij} + \lambda_2 (A_2 \cdot B)_{ij}$$

$$= \lambda_1 \sum_{l=1}^{n} (A_1)_{il} (B)_{lj} + \lambda_2 \sum_{l=1}^{n} (A_2)_{il} (B)_{lj}$$

Quindi tra loro (proprietà $+, \cdot$ in $\mathbb{R}$).

Cor: Se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f_A(x) = A \cdot x \qquad \text{è lineare.}$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix} \qquad f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f_A \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 57 \end{pmatrix}.$$

Def: $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è l'applicazione lineare associata alla matrice $A \in M_{m\times n}$.

(**Oss:** Se dico "X è associato a Y" significa "prima c'è Y e usando Y costruisco X".)

Def: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

matrice identità $n\times n$

$$\left((I_n)_{ij} = \delta_{ij} \right)$$

<u>Oss</u>: $A \cdot I_n = A$

$I_n \cdot B = B$ (ogni volte che i prodotti hanno senso)

<u>Es</u>: $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= I_3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}. \quad \boxtimes$$

Teo: le applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sono esattamente quelle del tipo f_A con $A \in M_{m \times n}$

Dim: sappiamo che f_A è lineare.

Data $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare dobbiamo trovare A tale che $g = f_A$, cioè $g(x) = f_A(x)$, cioè $g(x) = A \cdot x$.

Poiché $g(e_1^{(n)}) \in \mathbb{R}^m$, posso scriverlo in coordinate rispetto a $\mathcal{E}^{(m)}$:

$e_1^{(n)} \in \mathbb{R}^n$

$$g\left(e_j^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, e_i^{(m)}$$

Ho trovato $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \in M_{m\times n}$:

devo provare che

$$g(x) = A\cdot x \; -$$

$$g(x) = g\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j^{(n)}\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot g\left(e_j^{(n)}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i^{(m)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)}_{(A \cdot x)_i} \cdot e_i^{(m)}}_{A \cdot x} .$$

$\blacksquare$

$f: V \to W$ lineare

$Ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0\} \subset V$ sttsp

$Im(f) = \{f(v) : v \in V\} \subset W$ sttsp.

<u>Oss</u>: f suriettiva $\iff Im(f) = W$.

<u>Oss</u>: $f = 0$ (applicazione costante nulla)

$\iff Im(f) = \{0\} \iff Ker(f) = V$.

Prop: f iniettiva $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

Dim: $\Longrightarrow$ ovvia.

$\Longleftarrow$: Siano $v_1, v_2 \in V$ t.c. $f(v_1) = f(v_2)$;

allora $f(v_1) - f(v_2) = 0 \Longrightarrow f(v_1 - v_2) = 0$

$\Longrightarrow v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker}(f) = \{0\} \Longrightarrow v_1 - v_2 = 0$

$\Longrightarrow v_1 = v_2$.

$\blacksquare$

Teo (formula delle dimensioni):

$$\dim(V) < +\infty \Rightarrow \overbrace{\dim(\operatorname{Ker} f)}^{k} + \dim(\operatorname{Im} f) = \overbrace{\dim V}^{n}.$$

Dim: Siano $n = \dim V$, $k = \dim(\operatorname{Ker}(f))$;

Tesi: $\dim(\operatorname{Im} f) = n - k$.

Sia $v_1, \dots, v_k$ base di $\operatorname{Ker} f$; la completo a base $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ base di V.

Affermo che $\underbrace{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)}_{n-k}$ sono base di $\mathrm{Im}(f)$: ciò implica la tesi.

<u>Generano</u>: Sia $w \in \mathrm{Im}(f)$, cioè $w = f(v)$, $v \in V$; esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ t.c.

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n$$

$$\Rightarrow w = f(v) = \cancel{\big(\alpha_1 \underbrace{f(v_1)}_{=0} + \dots + \alpha_k \underbrace{f(v_k)}_{=0}\big)} + \alpha_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \alpha_n f(v_n)$$

__lin. indip.__ : Siano $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\alpha_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \alpha_n f(v_n) = 0$$

$$\Longrightarrow f(\alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n) = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n \in \operatorname{Ker} f$$

$\Longrightarrow$ esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ t.c.

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

$$\Rightarrow (-\alpha_1) v_1 + \dots (-\alpha_k) v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\Rightarrow (-\alpha_1) = \dots = (-\alpha_k) = \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0 \qquad \boxed{///}$$

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(V)$$

<u>COR</u>: Se $\dim V < \dim W$ allora f non può essere surg.

$\left(\dim(\mathrm{Im} f) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Ker} f) \leq \dim V < \dim W \right)$

<u>Es</u>: non esistono applicazioni <u>lineari</u> surgettive da $\mathbb{R}^7$ a $\mathbb{R}^{11}$

("$\mathbb{R}^{11}$ è più grande di $\mathbb{R}^7$ $\Rightarrow$ con $\mathbb{R}^7$ non riesco a coprire $\mathbb{R}^{11}$")

<u>Attenzione</u>: esistono $\exists f: \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^{11}$ bigettive (non lineari)

<u>Cor</u>: Se $\dim V > \dim W$ allora

$f: V \to W$ non può essere iniettiva.

$$\left(\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(V) - \underbrace{\dim(\operatorname{Im} f)}_{\substack{\leq \\ \dim W}} \geq \dim(V) - \dim(W) > 0 \right)$$

<u>Es</u>: Non esistono $f: \mathbb{R}^{11}$ a $\mathbb{R}^{7}$ lineari iniettive

("$\mathbb{R}^{11}$ è più grande di $\mathbb{R}^7$, quindi non riesco a realizzare $\mathbb{R}^{11}$ dentro $\mathbb{R}^7$ senza pieghe".)

Es: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f = f_A$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Ker} f = \{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = 0\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : A \cdot x = 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

I : $x_1 = -2x_2$

II : $4x_2 - 4x_3 = 0$ cioè $x_3 = x_2$

III : $-6x_2 + x_2 + 5x_2 = 0$ ✓

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Span} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \dim \ker f = 1$.

Oss: se $v_1, \dots, v_n$ generano V e $f : V \to W$ lin allora $f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano $\mathrm{Im}(f)$.

Oss: $\underset{m \times n}{A} \cdot e_j^{(n)}$ = j-esima colonna di A :

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad j \\ \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \\ & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

Oss: Le colonne di A sono un insieme di generatori di $\mathrm{Im}(f_A)$.

Nell'esempio:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \checkmark \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark \quad \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{2\cdot I - II}$$

generano $\mathrm{Im}(f)$

$\Rightarrow$ posso estrarre base

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 2$

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$$
$$1 + 2 = 3$$

<u>Oss</u>: Se W è uno spazio vett. l'insieme $\mathcal{F}(S, W)$ è uno sp. vett. con le operaz:

- $0 \in \mathcal{F}(S, W)$ è la funzione costante $0 \in W$

- $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$\mathcal{F}(S,W)$ (lo sto definendo)

di W

- $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.

<u>Def</u>: Indico con $\mathcal{L}(V,W) = \{ f : V \to W \text{ lineari} \}$
(l'insieme di tutte le appl. lin. da V in W).

Prop: $\mathcal{L}(V,W)$ è un sottospazio di $\mathcal{F}(V,W)$.

Dim: Siano $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(V,W)$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$;
devo vedere che $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ è lineare; cioè

$$\underbrace{(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(a_1 v_1 + a_2 v_2)}_{(L)} = \underbrace{a_1 (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v_1) + a_2 (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v_2)}_{(R)}$$

$$(L) = \lambda_1 f_1(a_1 v_1 + a_2 v_2) + \lambda_2 f_2(a_1 v_1 + a_2 v_2)$$

$$= \lambda_1 \left(a_1 f_1(v_1) + a_2 f_1(v_2)\right) + \lambda_2\left(a_1 f_2(v_1) + a_2 f_2(v_1)\right)$$

$$= \lambda_1 a_1 f_1(v_1) + \lambda_1 a_2 f_1(v_2) + \lambda_2 a_1 f_2(v_1) + \lambda_2 a_2 f_2(v_2)$$

$$(R) = a_1 \left(\lambda_1 f_1(v_1) + \lambda_2 f_2(v_1)\right) + a_2\left(\lambda_1 f_1(v_2) + \lambda_2 f_2(v_2)\right)$$

$$= a_1 \lambda_1 f_1(v_1) + a_1 \lambda_2 f_2(v_1) + a_2 \lambda_1 f_1(v_2) + a_2 \lambda_2 f_2(v_2).$$

$\blacksquare$

"La somma di appl. lin. è lineare"

"Multiplo numerico di appl. lin. è lineare".