Algebra Lineare 26/11/13

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$\det_n(A)$

- volume n-dim. con segno
- approccio assiomatico

<u>Formula</u>? (Poi: metodi.)

$\mathfrak{S}_n$ = tutte le funzioni $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ bip.

(permutazioni)

segnatura: $\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma \text{ è prodotto di numero pari di trasposiz.} \\ -1 & \text{se } \dots \text{ dispari } \dots \end{cases}$

<u>Oss</u>: $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)$ $\left((-1)^{k+l} = (-1)^k \cdot (-1)^l \right)$

$\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$

Prop: $$\det_n(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

gli $n!$ addendi

segno che dovevamo determinare

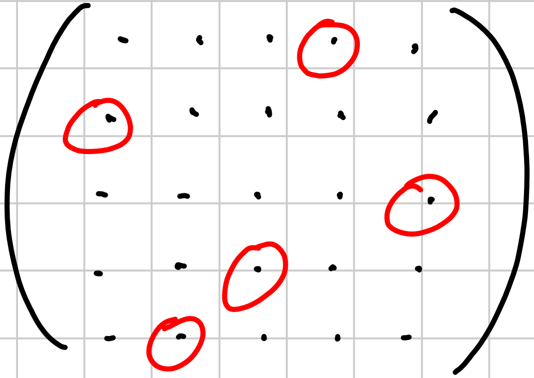
uno degli $n!$ addendi già descritti:

$i = 1 \dots n \Rightarrow$ ognuno su una riga diversa

$\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\} = \{1, \dots, n\}$

$\Rightarrow$ ognuno su una colonna diversa

Es: $n = 5$; ho $5! = 120$ addendi tra cui



? $a_{14} \cdot a_{21} \cdot a_{35} \cdot a_{43} \cdot a_{52}$

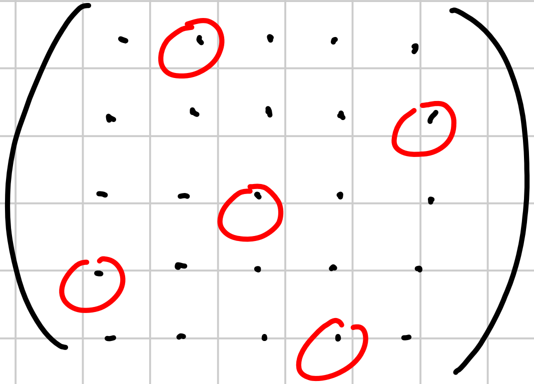
$\sigma = (4\,1\,5\,3\,2)$

$\downarrow$

$(1\,4\,5\,3\,2)$

$\downarrow$

$(1\,2\,5\,3\,4)$



$\sigma = (2\,5\,3\,1\,4)$

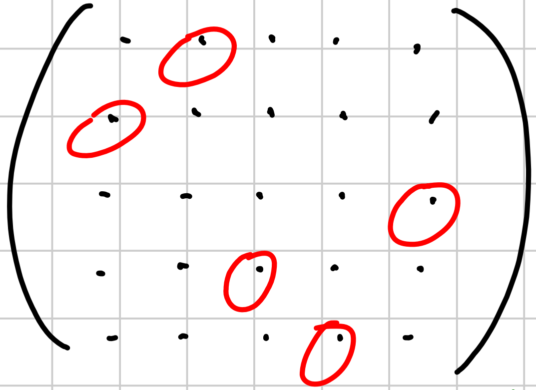
$\downarrow$

$(1\,5\,3\,2\,4)$

$\downarrow$

$(1\,2\,3\,5\,4)$

$\downarrow$



$\sigma = (2\,1\,5\,3\,4)$

$\downarrow$

$(1\,2\,5\,3\,4)$

$\downarrow$

$(1\,2\,3\,5\,4)$

$\downarrow$

$(1\,2\,3\,5\,4)$

$\downarrow$

$(1\,2\,3\,4\,5) \to +$

$(1\,2\,3\,4\,5) \to -$

$(1\,2\,3\,4\,5) \to -$

(P) $\det_n(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$

(A) $\det_n : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è caratterizzata:

(A1) lin. nella I colonna fissate le altre

(A2) cambia segno scambiando due col (A3) $\det_n(I_n) = 1$

Conseguenze delle due costruzioni:

(A) $\Longrightarrow$ $\det_n$ è lineare in ogni colonna
(usare (A2), poi (A1), poi (A2) due volte).

(A) $\Longrightarrow$ $\det_n(A) = 0$ se A ha due col. uguali

<u>Prop</u>: Se A non è invertibile allora $\det(A) = 0$.

<u>Dim</u>: Una delle colonne $c_1, \dots, c_n$ è comb. lin. delle altre:

$$c_j = \underbrace{\alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_{j-1} c_{j-1} + \alpha_{j+1} c_{j+1} + \dots + \alpha_n c_n}$$

$$\Rightarrow \det(c_1, \dots, c_j, \dots, c_n)$$

sostituisco e uso linearità

$$= \alpha_1 \underbrace{\det(c_1, \dots, c_1, \dots, c_n)}_{= 0} + \dots + \alpha_n \underbrace{\det(c_1, \dots, c_n, \dots, c_n)}_{= 0} \qquad \square$$

Prop (meno facile): vale il viceversa, cioè

$$\det(A) = 0 \Rightarrow A \text{ non invertibile}$$

(Senza dimo.)

Teo (Binet): $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$

Dim: I caso: B non invertibile

$\Rightarrow \det(B) = 0 \Rightarrow \det(A)\cdot\det(B) = 0$

$\Rightarrow A\cdot B$ non invert $\Rightarrow \det(A\cdot B) = 0$ ✓

II caso: B invertibile $\Rightarrow \det(B) \neq 0$;

considero $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$M \longmapsto \frac{\det(M\cdot B)}{\det(B)}$$

Facile vedere che:

f è lineare nella I col; f cambia segno scambiando due colonne; $f(I_n)=1$: sono le (A1), (A2), (A3)

$\Longrightarrow$ $f = \det_n \Longrightarrow f(A) = \det(A)$

Teo di caratterizzazione

$$f(A) = \frac{\det(A\cdot B)}{\det(B)}.$$

✓ $\blacksquare$

Altra conseguenza (utile) dell'approccio (A):

Prop: det non cambia se sostituisco una colonna con sé stessa più un multiplo di un'altra.

davvero diverse

Dim: $A = (c_1, \dots, c_n)$

$\rightsquigarrow A' = (c_1, \dots, c_i + \alpha c_j, \dots, c_j, \dots, c_n)$ $\quad j \neq i$

$\det(A') = \det(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) = \det(A)$

$$+\alpha \cdot \det(c_1, \dots, c_j, \dots, c_j, \dots, c_n) = 0. \qquad \blacksquare$$

<u>Es</u>: $A = \begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$

$$\det(A) = -21 - 16 + 15 - 2 - 70 - 36 = -130$$

$$\det(A) = \det \begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 13 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 13 & 3 & 7 \end{pmatrix}} \\ c_1+3c_2 & c_2 & c_3 \end{array} = 13 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= 13 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 19 \end{pmatrix}$$

$$= 13 \left(-19 + 0 + 0 + 9 + 0 + 0 \right) = -130 \quad \checkmark$$

<u>Oss</u>: per $n \geq 4$ non vale nulla di simile a Sarrus.

<u>Oss</u>: Posso eseguire contemporaneamente l'operaz. di sostituire una colonna con un multiplo

di un'altra c_j, perché io usi sempre la stessa c_j e che io non tocchi c_j.

Esempio.

$$\det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -7 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & & 4 & \end{array} \end{array} = \det \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 17 & -9 & -3 & -2 \\ -21 & 21 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Conseguenze di (P): $\det_n(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$

<u>Prop</u>: $\det({}^tA) = \det(A)$.

<u>Dim</u>: $\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} \underbrace{({}^tA)_{i,\sigma(i)}}_{a_{\sigma(i),i}} = \dots$

Riscrivo $\prod$ sostituendo $j = \sigma(i)$

$$\dots = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)} = \dots$$

Riscrivo $\sum$ sostituendo $\tau = \sigma^{-1}$

$$\dots = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \underbrace{\operatorname{sgn}(\tau^{-1})}_{\operatorname{sgn}(\tau)} \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)}$$

$$= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)} = \det(A). \quad \square$$

Cor: Le righe di $A \in M_{n\times n}$ sono lin. indip

$\iff$ lo sono le colonne.

Cor: Il det non cambia se sostituisco una riga con sé stessa + multiplo di un'altra

(e posso farlo contemporaneamente ...)

Es: $$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \\ -3 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -16 & 31 & 0 & 22 \\ -20 & 33 & 0 & 23 \\ -3 & 5 & -1 & 3 \\ -2 & 13 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sviluppi di Laplace

$A \in M_{n\times n}$; chiamo $A^{ij} \in M_{(n-1)\times(n-1)}$ la matrice ottenuta da A cancellando riga i e colonna j.

Es: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & 1 & 8 \\ 9 & -7 & -4 & \pi \end{pmatrix} \Rightarrow A^{23} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & 8 \\ 9 & -7 & \pi \end{pmatrix}$.

Teo: per $i = 1, \dots, n$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A^{ij}) \; ; \quad \text{sviluppo lungo riga } i$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ji} \cdot \det(A^{ji}) . \quad \text{sviluppo lungo colonna } i$$

(Segue dalla formula (P) _)

Esempi: $\det\begin{pmatrix} 4 & 3 & e & -1 \\ \pi & 7 & 2 & \sqrt{3} \\ 5 & -4 & 1 & 2 \\ -3 & 6 & 9 & -7 \end{pmatrix}$

$$= (-1)^{1+2}\cdot 3 \det\begin{pmatrix} \pi & 2 & \sqrt{3} \\ 5 & 1 & 2 \\ -3 & 9 & -7 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 7 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & e & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ -3 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+2}\cdot(-4)\cdot \det\begin{pmatrix} 4 & e & -1 \\ \pi & 2 & \sqrt{3} \\ -3 & 9 & -7 \end{pmatrix} + (-1)^{4+2}\cdot 6 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & e & -1 \\ \pi & 2 & \sqrt{3} \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es: $\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -12-6\cancel{-12}\cancel{+12}-9-8 = -35$

$\|$

$= -6\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$= 6 - 20 - 21 = -35$

Oss: Se ho una matrice $n \times n$ con tutti i coeff non nulli e sviluppo trovo $n!$ addendi e ognuno è multiplo di n determinanti $(n-1)\times(n-1)$

$\Rightarrow$ se sviluppo ciascuno trovo $n\cdot(n-1)$ addendi

e ciascuno è multiplo di un det $(n-2)\times(n-2)$

- - - - $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$ addendi.

Quindi: Prima di fare gli sviluppi si creano "molti" zeri usando le operaz. su righe e colonne.

(Nota: la strategia non è unica.)

Es:

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 9 & 8 \\ 0 & 5 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(-1)^{3+2}\cdot(-1)}_{+1}\cdot\det\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 9 & 8 \\ 0 & 5 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & -2 & -34 & -21 \\ 0 & 2 & -7 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 8 & 5 \end{pmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & -34 & -21 \\ 2 & -7 & -2 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 2 & 34 & 21 \\ 2 & -7 & -2 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 107 & 139 & 21 \\ -8 & -17 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 107 & 139 \\ -8 & -17 \end{pmatrix}$$

$$= -(139 \cdot 8 - 107 \cdot 17) = 707.$$

Teo: se $\det(A) \neq 0$ allora

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot \det(A^{ji})}{\det(A)}$$

Es:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} & \ldots \\ \ldots & \ldots & -\det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} & \ldots & \ldots \end{pmatrix} .$$

Dimo: posto $b_{ij} = \dfrac{(-1)^{i+j} \det(A^{ji})}{\det(A)}$

devo vedere che $A \cdot B = I_n$. Infatti:

$$(A \cdot B)_{lj} = \sum_{i=1}^{n} a_{li} \cdot b_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{li} \cdot \frac{(-1)^{i+j} \det(A^{ji})}{\det(A)}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{li} \det(A^{ji}) = \dots$$

se $l = j$

è esattamente lo sviluppo di $\det(A)$ lungo la riga j

$\Rightarrow$ fa $\det(A)$

se $l \neq j$ è lo sviluppo lungo la riga j della matrice ottenuta da A sostituendo riga j con riga l

$\Rightarrow \det(\text{matr. con due righe uguali}) = 0$

$\ldots = \delta_{lj}$.

<u>Cor</u> (regola di Cramer) : Se $A \in M_{n \times n}$ è invertibile la soluzione unica del sistema $A \cdot x = b$ è data da $x_j = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$

dove A_j è ottenuta da A scambiando la colonna j con b .

Es:
$$\begin{cases} 3x - 7y + 5z = 4 \\ 8x + \pi y - 17z = 5 \\ -6x + e\cdot y + 9z = -12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 5 & -17 \\ -6 & -12 & 9 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 8 & \pi & -17 \\ -6 & e & 9 \end{pmatrix}}$$

Dimo: $x_j = (A^{-1} \cdot b)_j = \sum_{i=1}^{n} (A^{-1})_{ji} \cdot b_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+j} \det(A^{ij})\, b_i}{\det(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} b_i \cdot \det(A^{ij})}{\det(A)}$$

sviluppo lungo la colonna j di $\det(A_j)$

$\square$