Algebra Lineare 20/11/13

Cerchiamo $\det_n : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che A invertibile $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Per $n = 1, 2, 3$

$$\det_1(a_{11}) = a_{11} \qquad \det_2\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det_3\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Proprietà valide per $n = 1, 2, 3$:

(A1) Fissate $c_2, c_3, \dots, c_n \in \mathbb{R}^n$, la funzione
$\mathbb{R}^n \ni c_1 \longmapsto \det_n(c_1, c_2, \dots c_n) \in \mathbb{R}$ è lineare
(cioè: $\det_n$ è lineare nella prima colonna fissate le altre; non è lineare)

(A2) Scambiando due colonne, $\det_n$ cambia segno

(A3) $\det_n(I_n) = 1$.

Spiegazione di (A1):

$$\det\begin{pmatrix} \lambda\cdot x+\mu\cdot\alpha & a_{12} & a_{13}\\ \lambda\cdot y+\mu\cdot\beta & a_{22} & a_{23}\\ \lambda\cdot z+\mu\cdot\gamma & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix} x & a_{12} & a_{13}\\ y & a_{22} & a_{23}\\ z & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} + \mu\det\begin{pmatrix} \alpha & a_{12} & a_{13}\\ \beta & a_{22} & a_{23}\\ \gamma & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

(the three columns are labelled by braces: c_1, c_2, c_3)

$$c_1 = \lambda\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

(facile verifica dalla formula).

(A2) $\det_3 \begin{pmatrix} x & \alpha & u \\ y & \beta & v \\ z & \gamma & t \end{pmatrix} = - \underbrace{\det_3 \begin{pmatrix} \alpha & x & u \\ \beta & y & v \\ \gamma & z & t \end{pmatrix}}_{\substack{\parallel \\ \alpha y t + x v \gamma + u \beta z \\ - u y \gamma - x \beta t - \alpha v z}}$

$\parallel$

$x\beta t + \alpha v z + u y \gamma$
$- u \beta z - \alpha y t - x v \gamma$

(A3) $\det_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1.$

Teo (senza dim.): $\forall n$ esiste una e una sola funzione $\det_n : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che soddisfa

(A1) lineare nella prima colonna

(A2) cambia segno scambiando due colonne

(A3) vale 1 su I_n.

Q: Come si calcola $\det_n(A)$?

$$\det{}_1 (a_{11}) = a_{11} \qquad \det{}_2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

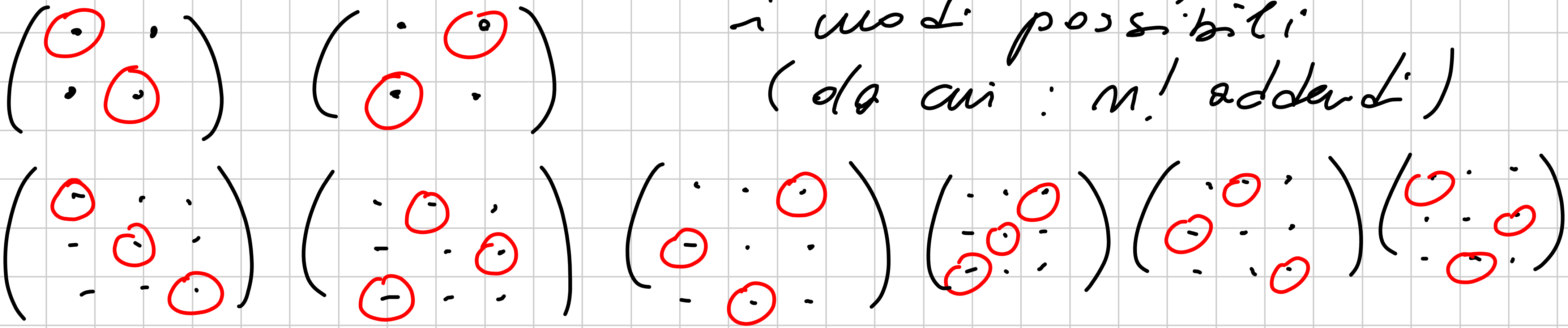
$$\det{}_3 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$
$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}.$$

<u>Osservazioni</u>:

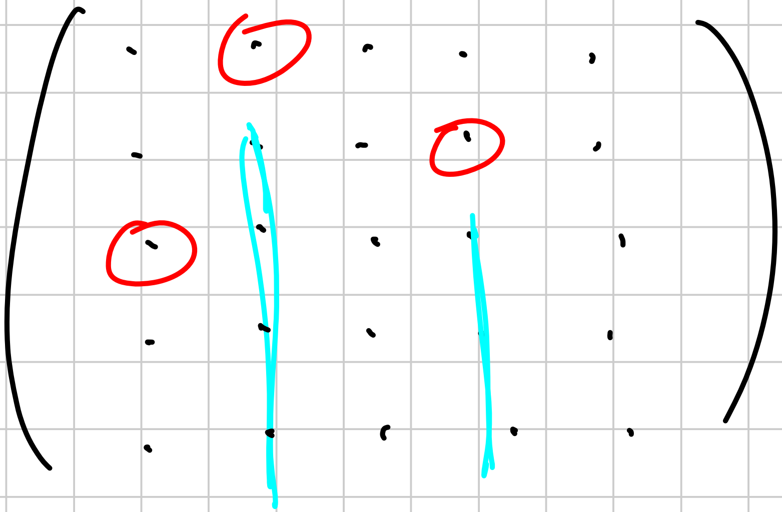
(P1) $\det_n$ è somma di $n!$ addendi

(P2) ogni addendo è prodotto di n coeff della matr.

(P3) i fattori di ogni addendo sono su righe e colonne distinte, in tutti i modi possibili (da cui: $n!$ addendi)



(Spiegazione di $n!$ Per scegliere n coeff di A su righe e colonne distinte, devo scegliere



- un coeff su 1ª riga — n
- un coeff su 2ª riga ma non nella col di quello già scelto — $n-1$
- un coeff su 3ª riga ma non sulle 2 col già scelte — $n-2$

$$\longrightarrow n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

(P4) Ognuno degli $n!$ addendi ha coeff ± 1 ...

<u>D</u>ef: Chiamo <u>permutazione</u> di un insieme S una $\sigma : S \to S$ bijettiva. (Cioè un riordinamento degli elementi di S.)
Indico con $\mathfrak{S}_n$ l'insieme di tutte le permutazioni dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$.

Oss: $\mathfrak{S}_n$ ha $n!$ elementi: per scegliere $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ devo scegliere:

- $\sigma(1)$ $\quad n$
- $\sigma(2) \neq \sigma(1)$ $\quad n-1$
- $\sigma(3) \neq \sigma(1), \sigma(2)$ $\quad n-2$

... $n(n-1) \ldots 2 \cdot 1 = n!$

Def: chiamo trasposizione un elemento di $\mathfrak{S}_n$

che consiste nello scambio tra loro di due elementi.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\
\downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
1 & 2 & \cdot & j & & i & & n
\end{array}
$$

<u>Notazione</u>: scrivo $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ come

$$(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \ldots, \sigma(n)).$$

Cioè ad esempio $(1\ 5\ 7\ 6\ 2\ 3\ 4) \in \mathfrak{S}_7$

è la funzione

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1 \\ 2 &\mapsto 5 \\ 3 &\mapsto 7 \\ 4 &\mapsto 6 \\ 5 &\mapsto 2 \\ 6 &\mapsto 3 \\ 7 &\mapsto 4 \end{aligned}$$

.

<u>Fatto</u>: ogni permutazione è composizione di trasposizioni.

<u>Esempio</u>: $(4\ 5\ 7\ 6\ 2\ 3\ 1) \longrightarrow (4\ 5\ 6\ 7\ 2\ 3\ 1)$

$\swarrow$ 1 $\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$ 1

$(1576234) \rightarrow (1276534) \xrightarrow{2} (1236574) \xrightarrow{3} (1234576) \xrightarrow{4} (1234567)$

$(4562731) \xrightarrow{2} (4526731) \xrightarrow{3} (4256731) \xrightarrow{4} (2456731) \xrightarrow{5} (2456371) \xrightarrow{6} (1456372) \xrightarrow{7} (1256374) \xrightarrow{8} (1236574) \xrightarrow{9} (1234576) \xrightarrow{10} (1234567)$

<u>Fatto</u>: la parità (essere pari o dispari) del

numero m di trasposizioni che danno una

data $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ dipende solo da σ.

Posso allora porre $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^m$.

<u>Fatto</u>: $\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \dfrac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$

produttoria

<u>Esempio</u>: $(4\,3\,1\,5\,2) \in \mathfrak{S}_5$

$$(43152) \to (13452) \to (12453) \to (12354) \to (12345)$$

$$\operatorname{sgn}(43152) = +1$$

$$\prod_{1 \le i < j \le 5} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = \cancelto{-1}{\frac{3-4}{2-1}} \cdot \cancelto{-1}{\frac{1-4}{3-1}} \cdot \cancel{\frac{5-4}{4-1}} \cdot \cancelto{-1}{\frac{2-4}{5-1}}$$

$$\cdot \cancelto{-1}{\frac{1-3}{3-2}} \cdot \cancel{\frac{5-3}{4-2}} \cdot \cancelto{-1}{\frac{2-3}{5-2}} \cdot \cancel{\frac{5-1}{4-3}} \cdot \cancel{\frac{2-1}{5-3}} \cdot \cancelto{-1}{\frac{2-5}{5-4}} = +1$$