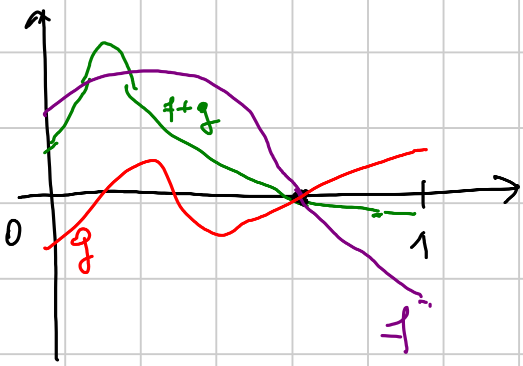
# Algebra lineare 15/10/13

$V$ sp. vett. $W \subset V$ sottosp. se
$0 \in W$ e $w_1, w_2 \in W$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$.

Es: $V = \mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ $\quad s_0 \in S$

- $\{f \in V : f(s_0) = 0\}$ è sottosp



- $s_1, s_2 \in S$, $\{f \in V : \sqrt{3} f(s_1) - 91 f(s_2) = 0\}$ è un sottosp.
- $S = [0,1]$ $C^0([0,1], \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua$\}$

  è un sottosp: • la funz. 0 costante è continua
  - se $f$ è continua anche $\lambda \cdot f$
  - se $f, g$ sono continue, $f+g$ lo è

(Oss: per $f, g : S \to \mathbb{R}$ è definito $f \cdot g : S \to \mathbb{R}$ $((f \cdot g)(s) = f(s) \cdot g(s))$ ma questa operaz. non entra nella struttura di spazio vett.)

Es.: $\{(a_n)_{n=0}^{+\infty} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$

"successioni alle Fibonacci con termini iniziali $a_0, a_1$ arbitrari" ; è sottosp :

$a, b$ come nelle def.

$$(a+b)_{n+2} \overset{?}{=} (a+b)_{n+1} + (a+b)_n$$

$$a_{n+2} + b_{n+2} \overset{?}{=} (a_{n+1} + b_{n+1}) + (a_n + b_n) \quad \text{Sì.}$$

---

Prop: Sia $S \subset V$ (fissato sp. vett.).
Allora esiste ed è unico "il più piccolo sottosp. vett. di $V$ che contiene $S$", cioè $W \subset V$ t.c.

1. $W$ è sottosp 2. $W \supset S$

3. Se $Z$ è sottosp. e $Z \supset S$ allora $Z \supset W$.

Lo chiamiamo sottospazio generato da $S$ e lo indichiamo con $\mathrm{Span}(S)$. Inoltre

$$\mathrm{Span}(S) = \{\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n : n \in \mathbb{N},\ s_1, \dots, s_n \in S \text{ e } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

cioè $\mathrm{Span}(S)$ è l'insieme di tutte le comb. lin. di elementi di $S$.

Dimo: Unicità: supponiamo di avere $W_1, W_2$ che soddisfano 1+2+3: devo vedere che $W_1 = W_2$.

Poiché $W_1$ soddisfa 1+2, cioè $W_1$ è sottosp. e $W_1 \supset S$;
applicando la 3 a $W_2$ troviamo $W_1 \supset W_2$.
Stesso ragionamento: $W_2 \supset W_1$ ↖ "contiene o è uguale; $\supseteq$"
$\Rightarrow W_1 = W_2$.

Esistenza: basta far vedere che
$$W = \{\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n : n, \lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}, s_1 \dots s_n \in S\}$$
soddisfa 1+2+3. Facile:

1. W sottosp: • $0 = 0 \cdot s$ $\quad s \in S$ a caso $(n=1)$

• $a(\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n) + b(\mu_1 t_1 + \dots + \mu_m t_m)$
$$= (a\lambda_1) s_1 + \dots + (a\lambda_n) s_n + (b\mu_1) t_1 + \dots + (b\mu_m) t_m.$$

2. $W \supset S$ : se $s \in S$, $s = 1 \cdot s$ $(n=1, \lambda_1 = 1, s_1 = s)$

3 Se $Z$ è sottosp. e $Z \supset S$ allora $Z \supset W$ :

preso $\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n \in W$ devo vedere $\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n \in Z$;

$$\underbrace{\underbrace{\lambda_1 \underset{\substack{\in \\ S \\ \subset \\ Z}}{s_1}}_{\in Z} + \dots + \underbrace{\lambda_n \underset{\substack{\in \\ S \\ \subset \\ Z}}{s_n}}_{\in Z}}_{\in Z}$$

$\boxtimes$

Oss: $\mathrm{Span}(\emptyset) = \{0\}$

insieme vuoto

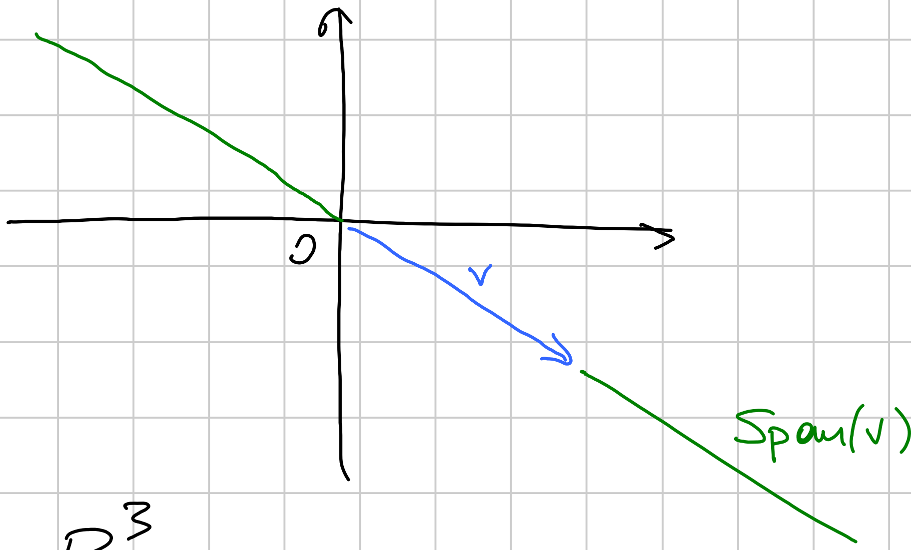
vettore zero

Oss: $\underbrace{\mathrm{Span}(\{v_1, \dots, v_n\})}_{\text{scrivo } \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)} = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$

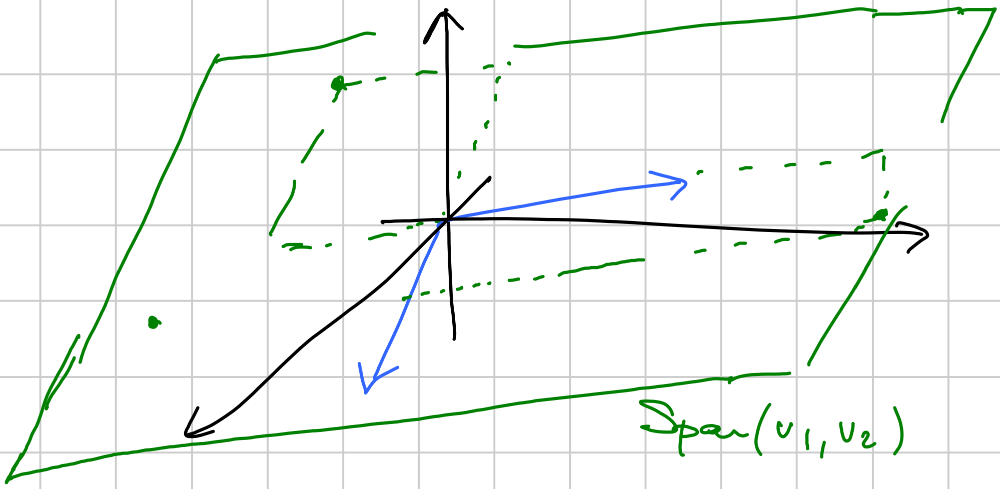
$(3v_1 + 5v_4 = 3v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 5v_4 + 0v_5 + \dots)$

scrivo $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$

Esempio: $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$




Es.: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$
(non nulli e
non multipli tra loro)




$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R} \}$$

(sottosp. generato da $v_1, \dots, v_n$)

Q: preso $v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$ la sua espressione come comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$ è unica?

Es: $\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^2$

$4v_1 - 3 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ ; unica?

$\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 10 \\ 2\alpha + 3\beta = -1 \end{cases}$

$3\mathrm{I} + 2 \cdot \mathrm{II} \Rightarrow 7\alpha = 28 \Rightarrow \alpha = 4$

$\Rightarrow -2 \cdot \mathrm{I} + \mathrm{II} \Rightarrow 7\beta = -21 \Rightarrow \beta = -3$

Sì

Es: $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$
$\quad v_1 \quad\quad v_2 \quad\quad v_3$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 = -v_2 + v_3$ Espressione non unica.

Def. diciamo che $v_1, \dots, v_n$ sono lineamente indipendenti se l'unica loro comb. lin. che ha risultato $0$ è quella con coeff. tutti $0$, cioè $0 \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$ ha espressione unica come comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$

Oss: $v_1, \dots, v_n$ lin. indip. $\Leftrightarrow$ ogni $v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$ ha espr. unica

Infatti: $\underbrace{\Leftarrow}$: ovvia

$\underbrace{\Rightarrow}$: sia $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$

allora $(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n - v_n) \mu_n = 0$

allora $\lambda_1 - \mu_1 = \dots = \lambda_n - \mu_n = 0$ cioè

$\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n$. $\square$

Es: $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ lin. indip?

Il sistema $\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ ha l'unica soluz. $\alpha = \beta = 0$?

$\begin{cases} 3\alpha - 5\beta = 0 \\ 7\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 4 \cdot I + 5 \cdot II \Rightarrow 37\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ -7 \cdot I + 3 \cdot II \Rightarrow 37\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \end{matrix}$ $\underline{\text{Sì}}$

Es: $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ lin. indip?

Il sistema $\alpha\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ ha unica soluz $\alpha=\beta=\gamma=0$?

$$\begin{cases} 2\alpha-\beta+3\gamma=0 \\ \alpha+3\beta+\gamma=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta=2\alpha+3\gamma \\ 7\alpha+10\gamma=0 \end{cases}$$

$\begin{cases}\alpha=-10\\ \beta=1\\ \gamma=7\end{cases}$ e $\begin{cases}\alpha=20\\ \beta=-2\\ \gamma=-14\end{cases}$ sono soluz. No

Def: chiamo base di uno spazio vettoriale $V$ un insieme $(v_1,\dots,v_n)$ finito e ordinato di el. di $V$ t.c.

$\mathrm{Span}(v_1,\dots,v_n)=V$ e sono lin. indip.

(generano $V$)

**Oss**: $(v_1, \dots, v_m)$ è base
$\Longleftrightarrow$ ogni el. di $V$ ha espressione unica come comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$

**Es**: $V = \mathbb{R}^2$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Base? Ogni $x \in \mathbb{R}^2$ ha espr. unica come
$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \ ?$$

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = x_1 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 = x_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x_2 - 5\lambda_2 \\ -13\lambda_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{5}{13}x_1 - \frac{3}{13}x_2 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{13}x_1 + \frac{2}{13}x_2 \end{cases}$$

Sì

Es: $\mathbb{R}^n$; base canonica

$$\mathcal{E}^{(n)} = \left(e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}\right) \text{ con } e_j^{(n)} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

(Se $n$ è chiaro dal contesto scrivo $e_j$.)

Base:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2} + \dots + x_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n}$$

Delta di Kronecker: $i, j \in \dots$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $\left( e_j^{(n)} \right)_i = \delta_{ij}$.

Esempio: $M_{m \times n}(\mathbb{R})$; $\mathcal{E}^{(m \times n)} = \left( E_{ij} \right)_{\substack{i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n}}$ canonica

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\uparrow_j$$

$$M \in \mathcal{M}_{m \times n} \Longrightarrow M = \sum_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} (M)_{ij} \cdot E_{ij}$$

bpr. ewdce

$m = n = 2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \pi \\ 7 & -1 \end{pmatrix}}_{M} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ 7 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}$ _

Es: $\mathbb{R}_{\leq d}[x] = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg(p(x)) \leq d \}$

Base canonica $1, x, x^2, \dots, x^d$

$$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_d \cdot x^d = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_d \cdot x^d$$

Es: $\mathbb{R}[x]$ non ha alcuna base, anzi
non ha alcun sistema finito di generatori:

(se per assurdo $\sqrt{3}+x$, $1-7x+5x^2$, $9-x^4+x^5$ generano ogni polinomio sarebbe scrivibile come

$$\lambda_1 \cdot (\sqrt{3}+x) + \lambda_2 \cdot (1-7x+5x^2) + \lambda_3 \cdot (9-x^4+x^5)$$

invece ad esempio $x^{1000}$ non si scrive così.)

Se per assurdo $p_1(x), \dots, p_k(x)$ generano

preso $d = \max\{\deg(p_j(x)) : j = 1 \dots k\}$

dovrei avere

$$x^{d+1} = \lambda_1 p_1(x) + \dots + \lambda_k p_k(x)$$

e non è così.

Def: se $\mathcal{B}$ è base di $V$ e $v \in V$ si scrive
$\underset{(v_1, \dots, v_n)}{\overset{\parallel}{}}$ come $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ chiamo

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$ il vettore delle coordinate di $v$ risp. a $\mathcal{B}$ e lo indico con $[v]_{\mathcal{B}}$

Es: Se $V = \mathbb{R}^n$, $[x]_{\mathcal{E}^{(n)}} = x$

Es: $V = \mathbb{R}^2$ $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ base

$v = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{19}{11} \\ -\frac{17}{11} \end{pmatrix}$.

Prop: Se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è base di $V$ la funzione

$$\phi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$v \longmapsto [v]_{\mathcal{B}}$$

$\underbrace{\text{è una biezione}}_{\phi_{\mathcal{B}} \text{ "traduce" } V \text{ in } \mathbb{R}^n}$ $\underbrace{\text{che rispetta le operazioni di sp. vett.}}_{\text{tale traduzione "è fedele" dal punto di vista degli sp. vett.}}$

V è "uguale" $\mathbb{R}^n$ come spazio vett.

Teo: se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono basi dello stesso sp. vett. $V$ allora hanno lo stesso numero di elementi

Def: se $V$ ha basi chiamo dimensione di $V$ (su $\mathbb{R}$) il numero di elementi di una base qualsiasi di $V$.

Prop: Siano $V_1$ e $V_2$ sp. vett. che ammettono basi. Allora

$\exists f: V_1 \to V_2$ bijettiva che rispetta le operazioni $\Longleftrightarrow$ $\dim_{\mathbb{R}} V_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_2$

$V_1$ e $V_2$ sono "uguali" come sp. vetto $\Longleftrightarrow$ hanno la stessa dimensione