Algebra Lineare 12/10/13

Invertibilità di appl. lin. e matrici

X, Y insiemi, $f : X \to Y$ è invertibile se $\exists\, g : Y \to X$ t.c. $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$.

Si pone allora $g = f^{-1}$, detta inversa di f.

Oss: f è invertibile $\Longleftrightarrow$ è bigettiva

($f^{-1}(y)$ è l'unico $x \in X$ t.c. $f(x) = y$.)

V, W sp. vett.; sia $\dim V = n$, $\dim W = m$.

Visto:

- Se $f: V \to W$ è lineare invertibile, allora $m = n$.
- Se $m = n$ e $f: V \to W$ è iniettiva allora è anche suriettiva (dunque invertibile)

• Se $m = n$ e $f: V \to W$ è surgettiva allora è anche iniettiva (dunque invertibile).

(<u>Oss</u>: se f è lineare invertibile allora f^{-1} è lineare:

$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$; applico f^{-1}

chiamando $w_1 = f(v_1)$ e $w_2 = f(v_2)$; ottengo

$\lambda_1 f^{-1}(w_1) + \lambda_2 f^{-1}(w_2) = f^{-1}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)$.)

Lem: Se $m=n$ e $f: V \to W$ è lineare:

- Se $g \circ f = id_V$ allora f è invertibile e $g = f^{-1}$
- Se $f \circ h = id_W$ allora f è invertibile e $h = f^{-1}$.

Dim: • $g \circ f = id_V \Rightarrow f$ iniettiva

$\Rightarrow \exists f^{-1}$ e $f^{-1} = id_V \circ f^{-1} = g \circ f \circ f^{-1} = g$.

• $f \circ h = id_W \Rightarrow f$ suriettiva

$\Rightarrow \exists f^{-1}$ e $f^{-1} = f^{-1} \circ id_W = f^{-1} \circ f \circ h = h$. $\boxtimes$

Esempio: $f: X \to Y$ $g: Y \to X$ t.c. $g \circ f = id_X$

$\not\Rightarrow g = f^{-1}$. Se $X = Y = [0, +\infty)$

$f(x) = x+1$, $g(x) = \max\{0, x-1\}$

f non surg. g non iniett però $f \circ g = id_{[0,+\infty)}$.

Esempio: Se $n < m$ e $f: V \to W$ è iniettiva esiste $g: W \to V$ t.c. $g \circ f = id_V$.

Prendo $v_1, \dots, v_n$ base di V; so che $w_1 = f(v_1), \dots, w_n = f(v_n)$ sono lin. indip. in W; completo a base $w_1, \dots, w_m$ e definisco $g(w_i) = v_i$ $i = 1 \dots n$ e $g(w_i)$ a caso per $i = n+1, \dots, m$. Att: $g \neq f^{-1}$

Esempio: Se $n > m$ e $f: V \to W$ è surgettiva esiste $h: W \to V$ t.c. $f \circ h = id_W$.

Sia $w_1, \dots, w_m$ base di W; scelgo v_i t.c.

$f(v_i) = w_i$; definisco $h : W \to V$ t.c.

$h(w_i) = v_i$. Att: $h \neq f^{-1}$

Versione per matrici

$A \in M_{n \times n}$ è invertibile se lo è l'applicaz. f_A ad essa associata; in tal caso la matrice A^{-1} è quella per cui $f_{(A^{-1})} = (f_A)^{-1}$. Cioè:

ricordando che $id_{\mathbb{R}^n} = f_{I_n}$, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$A \in M_{m \times n}$ è invertibile se esiste $B \in M_{n \times m}$ t.c. $B \cdot A = I_n$ e $A \cdot B = I_m$.

<u>Fatto</u>: B può esistere <u>solo</u> se $m = n$ —
(A quadrata) —

Fatto: Se $m = n$

- $B \cdot A = I_n \Longrightarrow \exists A^{-1}$ e $B = A^{-1}$
- $A \cdot C = I_n \Longrightarrow \exists A^{-1}$ e $C = A^{-1}$

Esempio: Se $m > n$ e $A \in M_{m \times n}$ è iniettiva allora esiste $B \in M_{n \times m}$ t.c. $B \cdot A = I_n$ (ma $B \neq A^{-1}$). (Segue da sopra).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2} \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$ Dunque A è iniettiva.

Cerco $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ t.c. $B \cdot A = I_2$; cioè

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a - b + 7c = 1 \\ 3a + 5b + 4c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\alpha - \beta + 7\gamma = 0 \\ 3\alpha + 5\beta + 4\gamma = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2a + 7c - 1 \\ 13a + 39c = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = 2\alpha + 7\gamma \\ 13\alpha + 39\gamma = 1 \end{cases}$$

$\nexists$ soluzioni.

Esempio: Se $m < n$ e $A \in M_{m \times n}$ è surgettiva esiste $B \in M_{n \times m}$ t.c. $A \cdot B = I_m$ (segue da sopra).

Def di $[v]_{\mathcal{B}}$: $\quad v = \mathcal{B} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$; cioè

se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è $[v]_{\mathcal{B}}$ se

$$v = (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Def di $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$: $\quad f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$; cioè

se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ è $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ se

$$f \cdot (v_1, \dots, v_n) = (w_1, \dots, w_m) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

1) Come cambiamo $[v]_{\mathcal{B}}$ cambiando $\mathcal{B}$?

2) Come cambia $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ cambiando $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$?

1) Supponiamo di avere due basi $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ e $\mathcal{B}' = (v_1', \dots, v_n')$ di V.

Scrivo $v_j' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} v_i$; chiamo

$(\lambda_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}} = M$ matrice di cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$

Ovvero: $(v_1', \dots, v_n') = (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$

$$\mathcal{B}' = \underline{\mathcal{B}} \cdot \underline{M}$$

Ovvero $id_V \cdot \mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot M$, dunque $M = [id_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$.

<u>Prop</u>: Se $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot M$ allora $\exists M^{-1}$ e

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cdot M^{-1}.$$

<u>Dim</u>: Sia X t.c. $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cdot X$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}' \cdot X = \mathcal{B} \cdot (M \cdot X)$$

$$\Longrightarrow \quad M \cdot X = [id_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = I_n \Longrightarrow X = M^{-1}. \ \blacksquare$$

Prop: Se $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot M$ allora $[v]_{\mathcal{B}'} = M^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$.

Dim 1: $v = \mathcal{B} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}' \cdot [v]_{\mathcal{B}'}$

$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot M \Longrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B}' \cdot M^{-1}$

$v = \mathcal{B} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}' \cdot \left(M^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}} \right)$

$\Longrightarrow [v]_{\mathcal{B}'} = M^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$. $\boxtimes$

<u>Dim 2</u> : $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ $\mathcal{B}' = (v_1', \dots, v_n')$

$M^{-1} = (\mu_{ij})$ $[v]_{\mathcal{B}} = x$ $[v]_{\mathcal{B}'} = x'$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cdot M^{-1} \implies v_j = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} \cdot v_i'$$

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot v_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} \cdot v_i'$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} \cdot x_j \right) \cdot v_i'$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{(M^{-1}\cdot x)_i}$$

$$\Longrightarrow \quad x_i' = (M^{-1}\cdot x)_i \quad \Longrightarrow \quad x' = M^{-1}\cdot x\,. \qquad \blacksquare$$

<u>Consiglio</u>: non usare direttamente la prop precedente: ricordare la def e pensare.

<u>Esempio</u> (verifica della prop. su numeri).

$$V = \{ x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \}$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \qquad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Se $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot M$ allora $[v]_{\mathcal{B}'} = M^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3a - c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3b - d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

OK

---

2) Come cambia $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ cambiando $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

<u>Prop</u>: Se $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot M$ e $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cdot N$

allora $[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} = N^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M$

__Dim__: Le def. di $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ e $[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}$ sono

$$f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \quad ; \quad f \cdot \mathcal{B}' = \mathcal{C}' \cdot [f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} .$$

So che $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot M$ e $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \cdot N^{-1}$. Ora:

$$f \cdot \mathcal{B}' = f \cdot \mathcal{B} \cdot M = \mathcal{C} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M$$

$$= \mathcal{C}' \cdot \underbrace{\left(N^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M \right)}$$

$\Longrightarrow$ è $[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}$. $\blacksquare$

<u>Consiglio</u>: non usare questa prop. ma le definizioni e pensare —

<u>Esempio</u>: $V = \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}$, così $f = f_A$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ $\quad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$ $\quad \mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

Voglio vedere : $[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} = N^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M$

dove $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot M \quad \mathcal{C}' = \mathcal{C} \cdot N$ _

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} = 105\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} - 43\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \end{pmatrix} = -62\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 27\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 105 & -62 \\ -43 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} = -15\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 34\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} -15 & 2 \\ 34 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{5}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{7}{13}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{18}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{13}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & 18 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 39\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} - 16\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 17\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 39 & 17 \\ -16 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 39 & 17 \\ -16 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ -16 & -39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 38a + 17c = 1 \\ -16a - 7c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 38b + 17d = 0 \\ -16b - 7d = 1 \end{cases}$$

$$a = 7 \qquad b = 17 \qquad c = -16 \qquad d = -38$$

$$N^{-1} \cdot [f]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} \cdot M \stackrel{?}{=} [f]^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 17 \\ -16 & -39 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 105 & -62 \\ -43 & 27 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 4 & 25 \\ -3 & -61 \end{pmatrix}} \cdot \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & 19 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} -15 & 2 \\ 34 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Sì}}$$