Algebra Lineare — 9/10/13

V spazio vett; $W \subset V$ sottosp. se

1. $0 \in W$ 2. $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$ 3. $\lambda \in \mathbb{R}, w \in W \Rightarrow \lambda w \in W$

Es: $V = \mathbb{R}^2$ $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$W = \{x \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\}$ è sottospazio

$0 \in W$ ✓ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $x, y \in W$ cioè $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$

$a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0$

$\lambda x + \mu y \overset{?}{\in} W$ Sì se

$$\underbrace{a_1(\lambda x+\mu y)_1 + a_2(\lambda x+\mu y)_2}_{\lambda(\underbrace{a_1x_1+a_2x_2}_{0}) + \mu(\underbrace{a_1y_1+a_2y_2}_{0})} \overset{?}{=} 0 \quad \checkmark$$

Vedremo: definiscono sottospazi "solo" le equazioni di questo tipo (polinomiali omogenee di I grado nelle componenti)

e le stesse equazioni "mascherate"

Es: $W=\{x\in\mathbb{R}^2 : e^{\sqrt{3}x_1-14x_2}=1\}$

equivale a $\sqrt{3}x_1 - 14x_2 = 0$

$\Rightarrow W$ è sottosp.

<u>Es</u>: $W = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ln(1 + (\pi \cdot x_1 - 43x_2)^2) = 0\}$

equivale a $\pi x_1 - 43x_2 = 0$

$\Rightarrow W$ è sottosp.

<u>Es</u>: $V = \mathbb{R}^n$

- $W = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$

1. $0 \in W$ ✓ 2. $x, y \in W$ cioè $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x+y)_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = 0 + 0 = 0 \checkmark$$

3. ✓

- $W = \{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^i = 0 \}$ $(x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \dots = 0)$

Non è sottosp. tranne che per $n = 1$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in W} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in W} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \notin W \Rightarrow \text{No.}$$

- $W = \{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} (i+1) x_i = 0 \}$ $\quad \underbrace{(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \cdots = 0)}_{}$

equaz. polinom. omogenea di I grado nelle componenti

È sottosp.: $0 \in W$ ✓

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x, y \in W$, cioè

$$\sum_{i=1}^{n} (i+1) x_i = \sum_{i=1}^{n} (i+1) y_i = 0$$

$\Rightarrow \lambda x + \mu y \in W$ poiché

$$\sum_{i=1}^{n} (i+1)(\lambda x + \mu y)_i = \sum_{i=1}^{n} (i+1)(\lambda x_i + \mu y_i)$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} (i+1) x_i + \mu \sum_{i=1}^{n} (i+1) y_i = 0 \quad \checkmark$$

- Con la stessa dimostrazione: dati $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$W = \{ x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0}_{} \} \text{ è sottosp.}$$

↳ la generica equaz. polinom. omogenea di I grado

Fatto: vanno bene "solo" tali equazioni

e loro "mascherate"

$$\underline{\text{Es}}: \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\sin\left(\underbrace{\frac{\sum_i \lambda_i x_i}{1+\left|\sum \lambda_i x_i\right|}}_{-1<\dots<1} \right) = 0}_{\text{equivale a } \sum \lambda_i x_i = 0} \right\}$$

$\Longrightarrow$ W sottosp.

Fatti generali:

1) Ogni V sp. vett. ha i sottospazi banali
$\{0\}$, V

2) Se W_1, W_2 sono sottospazi $\Longrightarrow$ $W_1 \cap W_2$ è sottosp.

Esempio: $\left\{ x \in \mathbb{R}^7 : \begin{array}{l} \pi x_1 - 15 x_2 + 3 x_7 = 0 \\ 9 x_2 - 4 x_3 + \sqrt{3} x_6 = 0 \\ 4 x_3 - 5 x_4 + 9 x_6 - x_7 = 0 \end{array} \right\}$

è un sottosp. di $\mathbb{R}^7$

Esempio: $V = \mathbb{R}[x]$

• $W = \{ p(x) \in V \ : \ \underbrace{p(-2)}_{\text{sostituire } x \text{ con } -2} = 0 \}$

per $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$ l'equaz. è

$$\underbrace{a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 \ \dots \ + (-2)^d \cdot a_d}_{\text{equaz. polinom. omogenea di I grado nei coeff. di } p(x)} = 0$$

(che consideriamo le "componenti di $p(x)$"

$$r = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \pi \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad p(x) = \sqrt{5} - e \cdot x + 7x^2 - 9x^3$$

3ª componente

posso vederla come componente di $p(x)$

W è sottosp: $0 \in W$ ✓ ; le altre seguono da

$$\left(\lambda \cdot p(x) + \mu \cdot q(x)\right)\Big|_{x=-2} = \lambda \cdot p(-2) - \mu \cdot q(-2)$$

- Fisso $d \in \mathbb{N}$

$$W = \{ p(x) \in V : \deg(p(x)) = d \}$$

non è sottosp. $(0 \notin W)$

- Fisso $d \in \mathbb{N}$

$$W = \{ p(x) \in V : \deg(p(x)) = d \} \cup \{0\}$$

Sottosp? No: $(x + 7x^2) + (-1 + 3x - 7x^2) = -1 + 4x$

- Fisso $d \in \mathbb{N}$

$$W = \{ p(x) \in V : \deg(p(x)) \leq d \}$$

è un sottospazio.

- Definisco $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = p(x)$

derivata di $p(x)$

$$W = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] : p''(3) = 0 \}$$

per $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots$

$\left(p''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2 + 20 a_5 x^3 + \dots \right)$ l'equaz. è

$$\underbrace{2a_2 + 18 a_3 + 108 a_4 + 540 a_5 + \dots = 0}$$

equaz. polinom. omog. di I grado nei coeff

$\Rightarrow W$ è sottosp.

$$\bullet\ W = \{ p(x) \in U : \underbrace{2x^2 p''(x) - 3x p'(x) + p(x) = 0}_{} \}$$

per $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

è

$$2x^2 \left(2a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2 + 20 a_5 x^3 + \dots \right)$$
$$-3x \left(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots \right.$$
$$+ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \qquad = 0$$

$$a_0 - 3a_1 x - a_2 x^2 + 4a_3 x^3 + \dots = 0$$

cioè

$a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0, \dots \implies W = \{0\}$

- $W = \{ p(x) \in V : \underbrace{x \cdot p''(x) + (1-x) p'(x) + 3p(x) = 0}_{} \}$

si traduce in un sistema di infinite equaz. polinom omogenee di I grado nei coeff. di $p(x)$

$\implies W$ è un sottosp. di $\mathbb{R}[x]$

—————— o —— o ——————

Esercizi del 4/10/13

1) $\{P(n)\}$, $n \in \mathbb{N}$

a = $P(0)$ è vero;

b = $P(j)$ vero, $0 \leq j \leq n$ (n qualunque)

$\Longrightarrow$ $P(n+1)$

$\Longrightarrow$ $P(n)$ vera $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Dimostrare usando il principio di induzione

$P'(n) := P(j)$ vero, $0 \leq j \leq n$

a $\Rightarrow$ ho passo base.

$P'(n) \Rightarrow P'(n+1)$? (passo induttivo)

b $\rightarrow P(n+1)$ vere $\Rightarrow P'(n+1)$ ✓

$\Rightarrow \{P'(n)\}$ vere $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow P(n)$ tutte vere.

2) Dim (usando l'induzione completa) che ogni naturale $n \in \mathbb{N}$ è prodotto di primi.

$P(n) := n+1$ è prodotto di primi, $n \in \mathbb{N}$

Passo base: $P(0)$: 1 è prodotto di primi

Passo induttivo: $P(j)$ vera, $0 \leq j \leq n$ ✓

$\Rightarrow P(n+1)$ vera ?

$n+2$ — primo $\longrightarrow$ ok

$n+2 = a \cdot b$, $1 \leq a, b \leq n$

$\Rightarrow$ a, b prodotti di primi $\Rightarrow$ anche n+2.

3) Dimostrare (usando 2)) che esistono infiniti numeri primi.

Per assurdo, supponiamo che $P_1, P_2, \dots, P_k \in \mathbb{N}$ siano tutti i numeri primi > 1.

$$1 + P_1 \cdots P_k > P_i \,, \quad i = 1, \dots, k$$

è divisibile da P_j, per $j \in \{1, \dots, k\}$

$$1 + p_1 \cdots p_k = p_j \cdot m \text{, per qualche } m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = p_j \cdot \left(m - \prod_{i \neq j} p_i\right)$$

impossibile perché $p_j > 1$! $(\Rightarrow\Leftarrow)$

4) (Usando l'induzione completa):

dimostrare il <u>principio del minimo</u>:

$X \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, m \in X$, t.c. $m \leq x$ $\forall\, x \in X$

"esiste"

"per ogni"

$A := \mathbb{N} \setminus X$ ← complementare di X

$P(n) := n \in A$ $\quad [n \notin X]$

Logica: facciamo vedere che se $X \subseteq \mathbb{N}$ senza minimo $\Rightarrow P(n)$ vera $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \quad X = \emptyset$

"equivale a"

- $P(0)$: $0 \notin X$ è vero, perché $0 \in X$
  $\Rightarrow 0 =$ minimo di X ✓

- $P(j)$ vera, $0 \leq j \leq n \Rightarrow P(n+1)$ vera
  $\Updownarrow$ $0, 1, \dots, n \notin X$

$n+1 \notin X$? sì, perché altrimenti

$n+1 \in X$, $0, \dots, n \notin X$ $\Rightarrow$ $n+1 =$ minimo di X

Ma X non ha minimo...

$\Rightarrow$ $P(n+1)$ è vera.

5) (Usando il principio del minimo):
dimostrare che, dati $n, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$,
$\exists!$ $q, r \in \mathbb{Z}$ tali che $n = m \cdot q + r$,
"esistono unici"
$0 \leq r < m$

<u>Unicità</u>: $n = q_1 \cdot m + r_1$
$n = q_2 \cdot m + r_2$ $\quad 0 \leq r_1, r_2 < m$

Supponiamo, ad esempio, $r_1 \geq r_2$

$$0 = (q_1 - q_2)\cdot m + r_1 - r_2 \iff$$

$$0 \le r_1 - r_2 = (q_2 - q_1)\cdot m \le m - 1$$

$$\Rightarrow q_1 - q_2 = 0 = r_1 - r_2 \iff q_1 = q_2 ,\ r_1 = r_2$$

<u>Esistenza</u>: $0 \le n < m \Rightarrow n = 0 \cdot m + n$

<u>$m < 0$</u> : $\rightsquigarrow$ ridursi al caso $n \geq 0$

(pensateci voi!)

$\underline{n \geq m}$: $X = \{n - q \cdot m,\ q \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$

$n - m \in X \Rightarrow X \neq \phi$

$\Rightarrow X$ ha minimo $r_0 = n - q_0 \cdot m$

$\Rightarrow$ Basta dimostrare $0 \leq r_0 \leq m - 1$

se $r_0 \geq m \Rightarrow 0 \leq r_0 - m = n - q_0 \cdot m - m =$

$= n - (q_0 + 1) \cdot m \in X$

ma r_0 è il minimo! $(\Rightarrow\Leftarrow)$

6) Dimostrare la regola di divisione tra polinomi: $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$,

$\deg(g(x)) > 0$, $\exists!\ q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$

t.c.

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

$$0 \leq \deg(r(x)) < \deg(g(x))$$

<u>Unicità</u>:

$$f(x) = q_2(x) \cdot g(x) + r_1(x)$$

$$f(x) = q_2(x) \cdot g(x) + r_2(x)$$

$$0 \le \deg(r_1(x)),\ \deg(r_2(x)) < \deg(g(x))$$

$$\underbrace{r_1(x) - r_2(x)}_{\deg < \deg(g(x))} = \big(q_2(x) - q_1(x)\big) \cdot g(x)$$

$\Longrightarrow$ polinomio nullo

$$\Longrightarrow \quad r_1 = r_2 \,, \quad q_1 = q_2$$

<u>Esistenza</u>, $X := \{ \deg(f(x) - q(x) \cdot g(x)) \,;\, q(x) \in \mathbb{R}[x] \}$

$\subseteq \mathbb{N}$

$$\left[\deg(g(x)) > \deg(f(x)) \Rightarrow f(x) = 0 \cdot g(x) + f(x)\right]$$

$\deg(g(x)) \leq \deg(f(x))$. $X \neq \emptyset$ (facile da vedere)

$\Rightarrow$ sia $r_0(x) = f(x) - q_0(x) \cdot g(x)$

un polinomio che realizza il minimo di X ; cioè $\deg(r_0(x)) = \min X$

Adesso : verifichiamo che $\deg(r_0(x)) < \deg(g(x))$

Altrimenti $\deg(r_0(x)) \geq \deg(g(x))$

$\Rightarrow \deg(r_0(x) - c \cdot x^m \cdot g(x)) < \deg(r_0(x))$

opportuni

$\Rightarrow r_0(x) - cx^m \cdot g(x) \in X$ e

ha grado minore di $\deg(r_0(x))$!

Non è possibile ... $\Rightarrow\Leftarrow$.

7) $(F_n)_{n=0}^{\infty}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

$$\Rightarrow \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Induzione: $P(n) := F_{n+1}$ dato dalla formula

$P(0)$: $\cancel{0 = 0}$ ✓ base

$$F_1 = 1 \overset{?}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\cancel{1}+\sqrt{5} - \cancel{1}+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \checkmark$$

Passo induttivo (induzione completa):

$$F_{n+2} := F_{n+1} + F_n$$

$\overset{\Vert}{\text{formula}} \xleftarrow{} P(n+1)$ $\qquad$ $\overset{\Vert}{\text{formula}} \xleftarrow{} P(n)$ $\qquad$ $P(n-1) \rightarrow \overset{\Vert}{\text{formula}}$

ipotesi induttiva: $P(j)$ vale $0 \leq j \leq n$

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{=:\,\xi_1}\right)^{n+1} - \left(\underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{=:\,\xi_2}\right)^{n+1}\right)$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\underbrace{\frac{1+\sqrt5}{2}}_{=:\xi_1}\right)^n - \left(\underbrace{\frac{1-\sqrt5}{2}}_{=:\xi_2}\right)^n\right)$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt5}\left(\xi_1^{n+1} - \xi_2^{n+1}\right) + \frac{1}{\sqrt5}\left(\xi_1^{n} - \xi_2^{n}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt5}\left(\underbrace{\xi_1^{n+1} + \xi_1^{n}}_{\overset{?}{=}\ \xi_1^{n+2}} - \left(\underbrace{\xi_2^{n+1} + \xi_2^{n}}_{\overset{?}{=}\ \xi_2^{n+2}}\right)\right)$$

$$\xi_2^2 = \xi_2 + 1 \;,\quad \xi_1^2 = \xi_1 + 1$$

basterebbe

$x^2 - x - 1 = 0$ ha radici:

$$\xi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \boxtimes$$

8) $$\sum_{j=0}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

dimostrare dopo aver verificato che è

sempre $\in \mathbb{N}$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n = 3 \cdot q + r$,

$r \in \{0, 1, 2\}$

$$\rightarrow n = \begin{cases} 3 \cdot q \\ 3q + 1 \\ 3q + 2 \end{cases}$$

Ad esempio: se $n = 3 \cdot q$ (gli altri casi sono analoghi):

$$\frac{\cancel{3}q \cdot (3q+1) \cdot (6q+1)}{6 = 2 \cdot \cancel{3}}$$

q pari ok

q dispari
$3q+1$ pari ok

$$P(0): \sum_{j=0}^{0} j^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0+1)}{2} = 0 \checkmark$$

$P(n)$ vera $\Longrightarrow$ $P(n+1)$ vera

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \quad : \quad P(n)$$

$$\overbrace{\sum_{j=0}^{n} j^2} + (n+1)^2 \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2\cdot(n+1)+1)}{6}$$

$P(n+1)$

sostituendo $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

sommando $(n+1)^2$ e calcolando,

si ottiene