Algebra Lineare — 6/11/13

(1) $S_n(\mathbb{R}) = \{ M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : {}^tM = M \}$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$\dim = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

$= \frac{1}{2} n(n+1)$. Base:

$E_{jj} \quad j = 1 \ldots n \qquad n$

$E_{jk} + E_{kj} \quad 1 \leq j < k \leq n \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

...

(o) $A_n(\mathbb{R}) = \{ M \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : {}^tA = -A \}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim = 0 + 1 + 2 + \cdots + n-1$

$= \frac{1}{2} n(n-1)$. Bene!

$E_{jk} - E_{kj} \qquad 1 \le j < k \le n$

<u>Oss</u>: $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$

$\dim S_n + \dim A_n = \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{2} n(n-1) = n^2 = \dim M_{n\times n}$

$\Longrightarrow$ Grassmann $\quad M_{n\times n} = S_n \oplus A_n$. Proiezioni:

dato $M \in M_{n\times n}$ avrò $M = S + A$

$S \in S_n$, $A \in A_n$.

$$M = S + A$$
$${}^tM = S - A$$

$$\Longrightarrow \quad S = \frac{1}{2}(M + {}^tM) \qquad A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$$

(le proiezioni di M su S_n e A_n rispetto $M = S \oplus A$).

(n) $\{ p(t) \in \mathbb{R}_{\leq d}[t] : p(-t) = p(t) \}$

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

$$a_0 - a_1 t + a_2 t^2 - a_3 t^3 \dots = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

$$a_1 = 0 \quad a_3 = 0 \dots$$

Base $1, t^2, t^4, t^6, \dots$

$$\dim = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1$$

(s) $\{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq d}[t] : p(-t) = -p(t)\}$

Base $t, t^3, t^5, \ldots$

$$\dim = \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor$$

(v) $\{f \in \mathcal{F}(\{a,b,c\}) : 3f(a) - 2f(b) + 5f(c) = 0\}$

$$2f(b) = 3f(a) + 5f(c) \qquad \dim = 2$$

Base $\begin{cases} a \longmapsto 2 \\ b \longmapsto 3 \\ c \longmapsto 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} a \longmapsto 0 \\ b \longmapsto 5 \\ c \longmapsto 2 \end{cases}$

(iv) $\left\{ f : \begin{array}{l} 2f(a) + 5f(b) + 3f(c) = 0 \\ 7f(a) - 3f(b) + 2f(c) = 0 \end{array} \right\}$ $\dim \geq 3-2$

$$\text{II} : 3f(b) = 7f(a) + 2f(c)$$

$$\text{I} : 6f(a) + 9f(c) + 35f(a) + 10f(c) = 0$$

$$41 f(a) + 19 f(c) = 0 \qquad \dim = 1$$

$$f(a) = 3 \cdot 19 \qquad f(c) = -3 \cdot 41$$

$$f(b) = 7 \cdot 19 + 2(-41)$$

$$\begin{cases} a \longmapsto 57 \\ b \longmapsto 51 \\ c \longmapsto -123 \end{cases}$$

Richiamo: Se $V = W \oplus Z$ ogni $v \in V$ si scrive come $v = \underset{\underset{p(v)}{\shortparallel}}{w} + \underset{\underset{q(v)}{\shortparallel}}{z}$

p, q proiezioni $: V \to V$

Proprietà: p lineare, $p \circ p = p$ (+ altre).

Prop: Se $p : V \to V$ è lineare e $p \circ p = p$ allora p è una proiez. associata a $V = W \oplus Z$.

Dim: Se è vero ho che $W = \operatorname{Im} p$ $\quad Z = \ker p$.

Dunque provo che loro vanno bene, cioè che

$V = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$ e che p è l'associata proiez.

- $\operatorname{Im} p \cap \ker p = \{0\}$. Se $v \in \operatorname{Im} p$ ho $v = p(u)$

  se $v \in \ker p$ ho $p(v) = 0$;

  allora $0 = p(v) = p(p(u)) = (p \circ p)(u) = p(u) = v$.

- $\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} p = V$: $\quad v = \underset{\operatorname{Im}(p)}{\underset{\cap}{p(v)}} + \underbrace{v - p(v)}_{\in \operatorname{Ker} p}$

(e provo che p è la proiez. canonica)

da provare

$$p(v - p(v)) = p(v) - p(p(v)) = p(v) - p(v) = 0$$

$\boxtimes$

Cambiamenti di base

<u>Ricordo</u>: $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V;
$x \in \mathbb{R}^n$ è $[v]_{\mathcal{B}}$ se
$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n .$$

Ora convengo di scrivere
$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = \underbrace{(v_1, \dots, v_n)}_{\prime} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

lista di vettori

nuovo

vett colonna numerico

<u>Oss</u>: se $V = \mathbb{R}^n$

$(v_1, \dots, v_n) \in M_{n \times n}$

il significato di $(v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è il

prodotto righe x colonne corrente

Ora $(v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathcal{B} \cdot x$ _

Dunque: x è $[v]_{\mathcal{B}}$ se $v = \mathcal{B} \cdot x$ _

Definizione sintetica di coordinate:

$$v = \mathcal{B} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

<u>Ricordo</u>: $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V

$\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ base di W

$f : V \to W$ lin.

$A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ è $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ se

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i = (w_1, \dots, w_m) \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

introdotto alla pagina prima

Ora scrivo $f(v_j)$ come $f \cdot v_j$

nuovo

Oss: Se $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, $f = f_A$ allora ho la relazione nota $f_A(v) = A \cdot v$.

Dunque $f \cdot v_j = (w_1, \dots, w_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

$$\left(f \cdot v_1, \dots, f \cdot v_n \right) = \left((w_1, \dots, w_m) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, (w_1 \dots w_m) \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right)$$

$$f \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nuovo}}}{\cdot} (v_1,\dots,v_n) \qquad (w_1,\dots,w_m) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nuovo}}}{\cdot} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(ma se $V=\mathbb{R}^n$, $W=\mathbb{R}^m$, $f=f_A$ sono i prodotti riga x col.)

Ora $f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot A$.

Def. sintetica di matrice associata:

A è $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ se $f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot A$; ovvero

$$f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

Prop: $\underset{\mathcal{B}}{V} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{C}}{W} \xrightarrow{g} \underset{\mathcal{D}}{Z}$

$$\Longrightarrow [g \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = [g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} .$$

("Se uso le basi in modo coerente la composizione di applicazioni si traduce nel prodotto delle matrici associate.")

Dim: $(g\circ f)\cdot \mathcal{B} = g\cdot f\cdot \mathcal{B} = g\cdot \mathcal{C}\cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$

$$= \mathcal{D}\cdot \underbrace{[g]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}\cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}}_{[g\circ f]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}} .$$

$\blacksquare$