Algebra Lineare — 5/11/13

$$\underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{B}}_{m\times k}$$

$$(A\cdot B)_{ij}=\sum_{l=1}^{n}(A)_{il}\cdot(B)_{lj}$$

<u>Oss</u>:

$$\underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{B}}_{m\times k}\cdot\underset{k\times h}{C}=\underset{m\times n}{A}\cdot\underbrace{\underset{n\times k}{B}\cdot\underset{k\times h}{C}}_{n\times h}$$

$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$$

$$m \times h \qquad\qquad m \times h$$

$$\big((A\cdot B)\cdot C\big)_{ij} = \sum_{l=1}^{k} (A\cdot B)_{il}\cdot (C)_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{k}\sum_{p=1}^{n} (A)_{ip}\cdot (B)_{pl}\cdot (C)_{lj}$$

$$\big(A\cdot(B\cdot C)\big)_{ij} = \sum_{p=1}^{n} (A)_{ip}\cdot (B\cdot C)_{pj}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} (A)_{ip} (B)_{pl} (C)_{lj} \quad \boxed{///}$$

$A \in \mathcal{M}_{m \times n}$; $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$x \longmapsto A \cdot x \quad \left(\text{“} f_A = A \text{”} \right)$$

<u>Oss</u>: $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $B_{n \times k} \implies A \cdot B \in \mathcal{M}_{m \times k}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^k \arrow[r, "f_B"] \arrow[rr, bend right, "f_{(A\cdot B)}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Allora $f_{A \cdot B} = f_A \circ f_B$.

Cioè "il prodotto tra matrici corrisponde alla composizione tra applicazioni".

(Altre ragione per scrivere $f_A = A$) –

Infatti: $(f_A \circ f_B)(x) = f_A(f_B(x))$

$= f_A(B \cdot x) = A \cdot (B \cdot x)$

$= (A \cdot B) \cdot x = f_{(A \cdot B)}(x)$. $\boxed{\text{//}}$

— o —

<u>Visto</u>: $\dim V = n \quad \dim W = m \Longrightarrow \dim(\mathcal{L}(V, W)) = n \cdot m$

(in due modi, usando basi di V e W) –

Prop: Se $(v_1, \dots, v_n) \stackrel{=\mathcal{B}}{}$ è base di V e $w_1, \dots, w_n \in W$ sono vettori qualsiasi esiste una e una sola appl. lin. $f: V \to W$ t.c. $f(v_j) = w_j \quad j = 1, \dots, n$.

(Cioè: "Una appl. lin. si può definire a piacimento su una base".)

<u>Dim</u>: se f esiste allora per $v \in V$ si ha

$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ con $x = [v]_{\mathcal{B}}$; allora

$f(v) = x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$

$\Rightarrow$ $f(v)$ è univoc. determinato; dunque f se esiste è unica

<u>Esistenza</u>: dato $v \in V$, se $x \in [v]_{\mathcal{B}}$ pongo

$$f(v) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$$

Resta definito $f: V \to W$; devo vedere che è lin.

Ad es. provo che $f(v+u) = f(v) + f(u)$.

Siano $x = [v]_{\mathcal{B}}$, $y = [u]_{\mathcal{B}}$; so già che

$[v+u]_{\mathcal{B}} = x+y \Longrightarrow$

$f(v+u) = (x_1+y_1)w_1 + \cdots + (x_n+y_n)w_n$

$f(v) + f(u) = (x_1w_1 + \cdots + x_nw_n) + (y_1w_1 + \cdots + y_nw_n)$. $\boxtimes$

<u>Cor</u>: fissata $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$ l'applicazione

$$\underbrace{W\times\dots\times W}_{n} \longrightarrow \mathcal{L}(V,W)$$

$$(w_1,\dots,w_n)\longmapsto \left(\begin{array}{l}\text{l'unico } f\in\mathcal{L}(V,W)\\ f(v_j)=w_j \quad j=1\dots n\end{array}\right)$$

è $\overbrace{\text{lineare}}^{\text{biiettiva}}$ (oss: $W\times\dots\times W$ è sp. vett) e rispetto a operazioni. Dunque

$$\dim(\mathcal{L}(V,W)) = \dim(\underbrace{W \times \dots \times W}_{n}) = n \cdot m.$$

$$W \times \dots \times W = W^n$$

$\blacksquare$

<u>Esempio</u>: Sia $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

$$W = \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{B} = \left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}} \right) \quad \text{base di } V$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ esiste unica $f : V \to W$ lineare

t.c. $f(v_1) = w_1$ e $f(v_2) = w_2$.

Inoltre ad es.

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} = f\left(\frac{29}{31} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} - \frac{3}{31} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{29}{31} \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{3}{31} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{31} \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}.$$

Somma diretta:

$W, Z \subset V$ scriviamo $V = W \oplus Z$ ("somma diretta")

se $W + Z = V$, $W \cap Z = \{0\}$.

esistenza   unicità

Prop: se $V = W \oplus Z$ allora ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = w + z$ con $w \in W$, $z \in Z$.

Dim: Poiché $W+Z=V$ e $W+Z=\{w+z : w\in W, z\in Z\}$ almeno una espressione $v=w+z$ esiste.

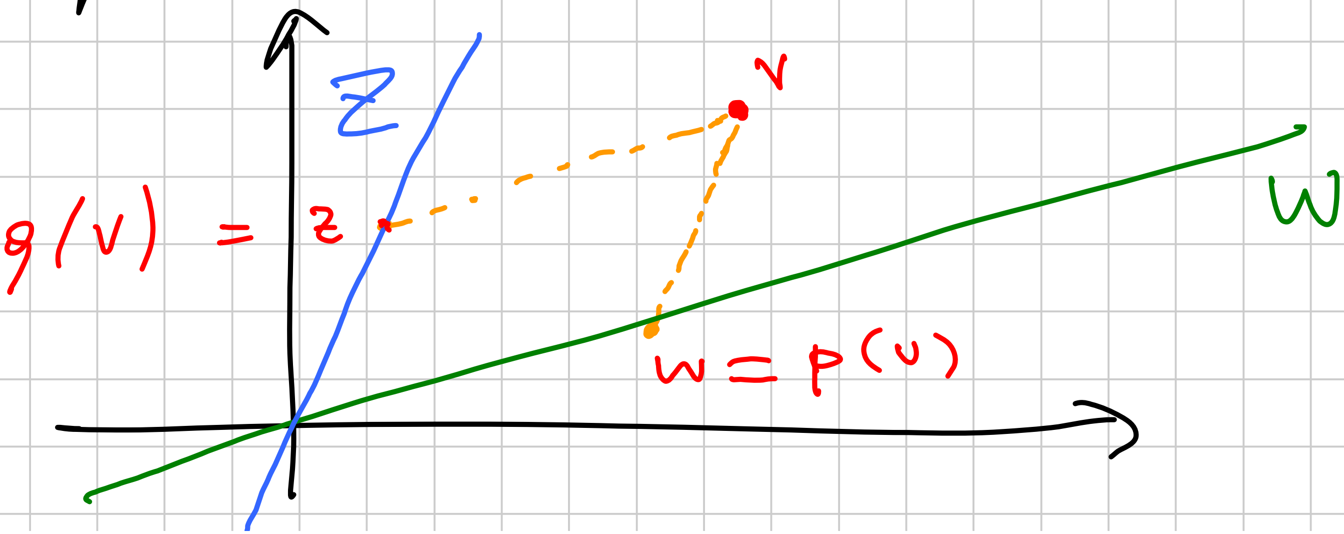
Unicità: sia $v = w_1+z_1 = w_2+z_2$ con ...

$$\Longrightarrow \underbrace{w_1-w_2}_{W} = \underbrace{z_2-z_1}_{Z}$$

$$\Longrightarrow w_1-w_2 = z_1-z_2 \in W\cap Z = \{0\}$$

$$\Longrightarrow w_1-w_2=0 \quad z_1-z_2=0 \Longrightarrow w_2=w_1,\ z_2=z_1. \ \boxtimes$$

Def: Se $V = W \oplus Z$ e $v = w + z$ pongo $p(v) = w$ e $q(v) = z$; ottengo due applicazioni $p, q : V \to V$ che chiamo proiezioni associate alla decomposizione $V = W \oplus Z$.



Prop: Siano p, q le proiez. su W e Z assoc. a $V = W \oplus Z$
Allora:

1) p, q sono lineari
2) $\mathrm{Im}\, p = W$, $\mathrm{Ker}\, p = Z$; $\mathrm{Im}\, q = Z$, $\mathrm{Ker}\, q = W$
3) $p \circ p = p$, $q \circ q = q$; $p \circ q = 0$, $q \circ p = 0$
4) $p + q = \mathrm{id}_V$.

(Attenzione: $p, q : V \to V$; potrei

definire $\tilde{p} : V \to W$ come $\tilde{p}(v) = p(v)$

$\tilde{q} : V \to Z$ come $\tilde{q}(v) = q(v)$

ma è meglio usare p e q. Ad esempio

$p+p$ ha senso, $\tilde{p}+\tilde{q}$ No.)

Dim: 1) p lineare; provo che

$p(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 p(v_1) + \lambda_2 p(v_2)$:

diciamo $w_1 = p(v_1)$ e $w_2 = p(v_2)$, cioè

$v_1 = w_1 + z_1$, $v_2 = w_2 + z_2$ $\quad w_1, w_2 \in W$, $z_1, z_2 \in Z$

$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \underbrace{(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)}_{W} + \underbrace{(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)}_{Z}$$

$$\Rightarrow p(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 .$$

ok

2) $\mathrm{Im}(p) = W$; $\subset$ ovvia

Viceversa se $w \in W$ ho

$$w = \underbrace{w}_{\substack{\cap \\ W}} + \underbrace{0}_{\substack{\cap \\ Z}} \implies p(w) = w$$

$$\implies w \in \mathrm{Im}(p)$$

Ne segue anche che $p \circ p = p$;

$$p(\underbrace{p(v)}_{\substack{\| \\ w}}) = w = p(v) .$$

$\operatorname{Ker} p = Z$ $\supset$ ovvio: $z = \underset{\substack{\Uparrow \\ W}}{0} + \underset{\substack{\Uparrow \\ Z}}{z}$

$\Longrightarrow p(z) = 0.$

Viceversa: $p(r) = 0 \Longrightarrow r = \underset{\substack{\| \\ 0}}{p(r)} + \underset{\substack{\Uparrow \\ Z}}{q(r)}$

$\Longrightarrow r \in Z.$

3) $p \circ q = 0$ (segue da 2)

4) $v = p(v) + q(v) \Longrightarrow p + q = id_V$.

$\forall v$

$\boxtimes$

Esempio: $V = \mathbb{R}^3$ $\quad W = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0\}$

$$Z = \text{Span}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Affermo che $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$:

$\dim W = 2$, $\dim Z = 1$

$$W \cap Z = \begin{cases} Z & \text{se } \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in W \quad \text{NO} \\ \{0\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ per Grassmann essendo $\dim W + \dim Z = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

ho $W + Z = \mathbb{R}^3$ _ Dunque $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$.

Cerco $p\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$: devo scrivere

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = w + z$$

in W

sarà $p \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

in Z, cioè

$$z = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dunque voglio che

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in W$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 - 4t \\ 7 - 2t \\ -1 + t \end{pmatrix} = 0$$

$$-18+3t=0 \Longrightarrow t=\frac{18}{3}$$

$$\Rightarrow p\begin{pmatrix}4\\7\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\7\\-1\end{pmatrix}-\frac{18}{3}\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdots\\ \cdot\ \sim\\ -\ \cdots\end{pmatrix}.$$

———— o ————

Esercizi - foglio del 18/10/13, esercizio 2.

$\dim V =$ num. el'ti di una base $v_1, \dots, v_n$;

ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come

$v = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n \qquad t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \dim V =$ num. di parametri da cui un generico vettore di V dipende davvero

(potrei sempre aggiungere parametri

$v = t_1 v_1 + \dots + t_n + 1(v_1 - 7v_2 + 4v_3)$

ma tali $t_1, \dots, t_n, t$ non sono più unici)

(d) $V = \{x \in \mathbb{R}^4 : 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0\}$ (dim = 3?)

$x \in V \iff x_3 = -\frac{5}{2}x_1 + 4x_2 + \frac{3}{2}x_4$

vincolato

3 parametri liberi

$\Rightarrow$ dim $= 3$

Base:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verifica: lin. indip:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = 0$$

I: $\alpha_1 = 0$

II: $\alpha_2 = 0$

IV: $\alpha_3 = 0$

значит: $x \in V \Rightarrow$

$$x = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5/2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} -$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

~~(e)~~

(f) $V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0 \\ 8x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \end{array} \right\}$ $(\dim \geq 2)$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x_4 = 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 \\ 16x_1 - 14x_2 + 8x_3 \\ -25x_1 - 15x_2 - 35x_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{II} \\ \text{I} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 9x_1 = -29x_2 - 27x_3 \\ \underset{9}{\cancel{18}}x_4 = -145x_2 - 135x_3 \\ \qquad + 27x_2 + 63x_3 \\ \qquad = \underset{-59}{\cancel{-118}}x_2 \underset{-36}{\cancel{-72}}x_3 \end{array} \right.$$

liberi

vincolati

$\Rightarrow \dim = 2$

Base : $\begin{pmatrix} 29 \\ -9 \\ 0 \\ 59 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27 \\ 0 \\ -9 \\ 36 \end{pmatrix}$

(g) $\left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 9x_4 = 0 \\ -5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 9x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 20x_4 = 0 \end{array} \right\}$ $\dim \overset{?}{=} 1$

$2 \cdot \mathrm{I} - \mathrm{II}$

NO : dim $= 2$ (procedere come col prec.)

(h) $\left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \sum (-1)^{j+1} x_j = 0 \right\}$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \cdots = 0$$

$$\underset{\text{vincolato}}{x_1} = \underbrace{x_2 - x_3 + x_4 \cdots}_{\text{liberi}}$$

Base:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \; \dots \; \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \dim = n-1$$

(l) $$\left\{ A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{array}{l} a_{11} - 2a_{12} + 3a_{23} = 0 \\ -a_{11} + a_{12} + 2a_{13} = 0 \\ a_{12} + a_{21} + a_{13} = 0 \\ a_{21} + 4a_{23} + 2a_{13} = 0 \end{array} \right\} \quad (\dim \geq 6-4)$$

$$\text{I}: \quad a_{11} = 2a_{12} - 3a_{23}$$

$$\text{II}: \quad 2a_{13} = a_{11} - a_{12} = a_{12} - 3a_{23}$$

$$\text{III}: \quad a_{21} = -a_{12} - a_{23}$$

$$\text{IV}: \quad -\cancel{a_{12}} - \cancel{a_{23}} + \cancel{4a_{23}} + \cancel{a_{12}} - \cancel{3a_{23}} = 0$$

inutile

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \end{pmatrix}$$

anche lui!

dim = 3

$$\text{Base} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) $\{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 4}[t] : \; 2p(1) + p''(-1) = p(2) - 3p'(1) = 0\}$

$\dim \stackrel{?}{=} 5-2$

$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$

$$\mathrm{I}: \quad 2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4$$
$$+ 2a_2 - 6a_3 + 12a_4 = 0$$

$$\mathrm{II}: \quad a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4$$
$$- 3a_1 - 6a_2 - 9a_3 - 12a_4 = 0$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + 2a_2 - 2a_3 + 7a_4 = 0 \\ a_0 - a_1 - 2a_2 - a_3 + 4a_4 = 0 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(-3a_3 + 11a_4\right)$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(4a_2 - a_3 + 3a_4\right)$$

$\dim = 3$

Base: $0 + 2t + 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 + 0 \cdot t^4$

$$-3/2 + -1/2 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 1 \cdot t^3 + 0 \cdot t^4$$

$$11/2 + 3/2 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 + 1 \cdot t^4$$