Algebra Lineare 4/12/13

Ultima settimana: esercizi / quesiti dai temi d'esame : chiedete

Numeri complessi

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

|

risolvere l'equaz. $n + x = 0$

|

risolvere $n \cdot x = 1$

|

risolvere equaz. come $x^2 = 2$ (ma non solo motivaz. algebriche)

Fatto: su $\mathbb{R}$ l'equaz. $x^2 + 1 = 0$ non ha soluz.

Inventiamo un simbolo i (unità immaginaria — oggetto $\notin \mathbb{R}$) che risolve $x^2+1=0$, cioè

$$i^2 = -1.$$

Se lo trattiamo come numero otteniamo:

- $i \cdot b \qquad b \in \mathbb{R}$
- $a + i \cdot b \qquad a, b \in \mathbb{R}$
- $(a + i \cdot b) + (c + i \cdot d) = (a+c) + i \cdot (b+d)$

nuovo

- $(a+i \cdot b) \cdot (c + i \cdot d) = a \cdot c + a \cdot i \cdot d + i \cdot b \cdot c + i^2 \cdot b \cdot d$
$= (a \cdot c - b \cdot d) + i (a \cdot d + b \cdot c)$

nuovo

Def: Chiamo un oggetto $a+i\cdot b$ numero complesso;

$\mathbb{C} = \{ a+ib : a,b \in \mathbb{R} \}$; ho le operaz:

$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (appena definite)

$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

OSS: Posso identificare $\mathbb{R}$ a un sottoinsieme di $\mathbb{C}$ ponendo $a = a + i\cdot 0$.

Dunque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e ho $0 = 0 + i\cdot 0 \in \mathbb{C}$

$1 = 1 + i\cdot 0 \in \mathbb{C}$.

Teo: $\mathbb{C}$ con le operaz $+, \cdot, 0, 1$ è un campo.

Dim: 1-4 : $\mathbb{C}, +, 0$ è un gruppo commut

5-8 : $\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1$ " " "

9 : distributiva.

8 : $$(a+ib)\cdot(c+id) \overset{?}{=} (c+i\cdot d)(a+i\cdot b)$$

$$(a\cdot c - b\cdot d) + i(a\cdot d + b\cdot c) \qquad (c\cdot a - d\cdot b) + i(c\cdot b + d\cdot a) \checkmark$$

6: Esistenza dell'inverso moltiplicativo per $a+ib \neq 0$, cioè $a \neq 0$ oppure $b \neq 0$;

Cerco $x+iy$ t.c. $(x+iy)(a+ib) = 1$, cioè

$(a \cdot x - by) + i(b \cdot x + a \cdot y) = 1 + i \cdot 0$ cioè

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \qquad \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 > 0$$

$\Longrightarrow \exists$ soluz. unica

$$x = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad y = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow (a+ib)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\cdot\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

$\boxtimes$

Def: V si dica spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ se sono date due operazioni:

$$V \times V \to V \qquad\qquad \mathbb{C} \times V \to V$$
$$(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2 \qquad\qquad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

che soddisfano le 8 proprietà come nel

campo reale: 1-4 , $V, +, 0$ è gruppo comm.

5, 6 "distributive"

7 "associative ·"

8 $1 \cdot v = v$, $0 \cdot v = 0$.

__Tutto__ quanto visto su $\mathbb{R}$ si ripete su $\mathbb{C}$

(di $\mathbb{R}$ si usano solo le proprietà di campo).

<u>Es</u>: Se V è sp. vett. su $\mathbb{C}$, $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V se ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. In tal caso diciamo che V ha dimensione n su $\mathbb{C}$, scriviamo $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$.

Oss: Uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ è anche uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (basta restringere $\mathbb{C} \times V \to V$ a $\mathbb{R} \times V \to V$).

Es: $V = \{ z \in \mathbb{C}^3 : z_1 - i z_2 + (1+i) z_3 = 0 \}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2+3i \\ 3 \\ 1-i \end{pmatrix} \in V \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -9-6i \\ 1+2i \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$V_1 + V_2 = \begin{pmatrix} -11-3i \\ 4+2i \\ 8-i \end{pmatrix}$$

è operaz. di $\bar{V}$ come sp. vett. su $\mathbb{C}$ e su $\mathbb{R}$

$$(2-i)\cdot V_1 = \begin{pmatrix} -1+8i \\ 6-3i \\ 1-3i \end{pmatrix}$$

è operaz. di $\bar{V}$ come sp. vett. su $\mathbb{C}$ ma <u>non</u> su $\mathbb{R}$

$$4\cdot V_2 = \begin{pmatrix} -36-24i \\ 4+8i \\ 28 \end{pmatrix}$$

è operaz. di $\bar{V}$ come sp. vett. su $\mathbb{C}$ e su $\mathbb{R}$

Oss: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ perché (1) è base.

Ora $\mathbb{C} = \{a+ib : a, b \in \mathbb{R}\} \leftrightarrow \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

Prop: $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}}(V)$.

Dim: Se $(v_1, \dots, v_n)$ è base di V su $\mathbb{C}$

$\forall v \in V$ esistono unici $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$\Rightarrow \forall v \in \bar{V}$ esistono unici $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ t.c.

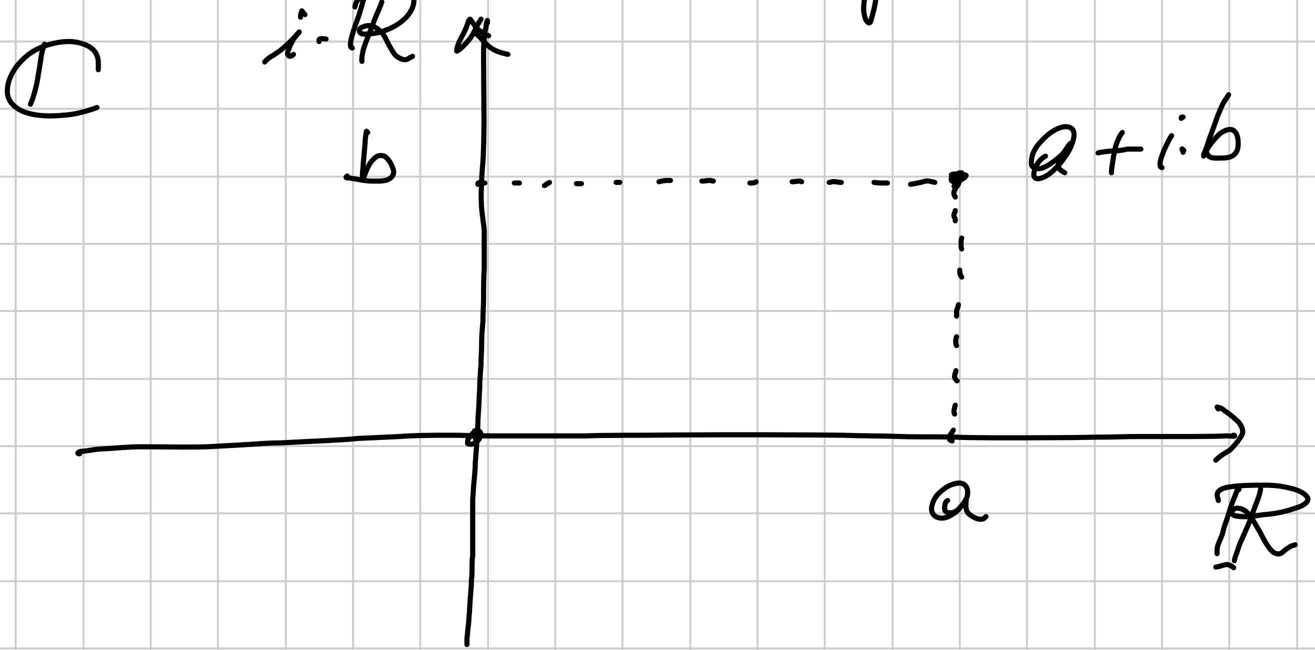
$v = (a_1 + i b_1) \cdot v_1 + \dots + (a_n + i b_n) \cdot v_m$

$\Rightarrow \forall v \in \bar{V}$ esistono unici $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ t.c.

$v = a_1 \cdot v_1 + b_1 \cdot (i v_1) + \dots + a_n \cdot v_n + b_n \cdot (i v_n)$

$\Rightarrow v_1, i \cdot v_1, \dots, v_m, i \cdot v_m$ è una base di $\bar{V}$ su $\mathbb{R}$. $\blacksquare$

Notazione e terminologia per $\mathbb{C}$:



$i \cdot \mathbb{R} =$
= asse immaginario

Se $z = a + ib$ chiamo :

$a = \mathrm{Re}(z)$ parte reale di z

$b = \mathrm{Im}(z)$ parte immaginaria di z (non $i \cdot b$)

$\bar{z} = a - i \cdot b$ coniugato di z (in $\mathbb{C}$ come piano è il simmetrico di z rispetto a $\mathbb{R}$)

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ modulo di z.

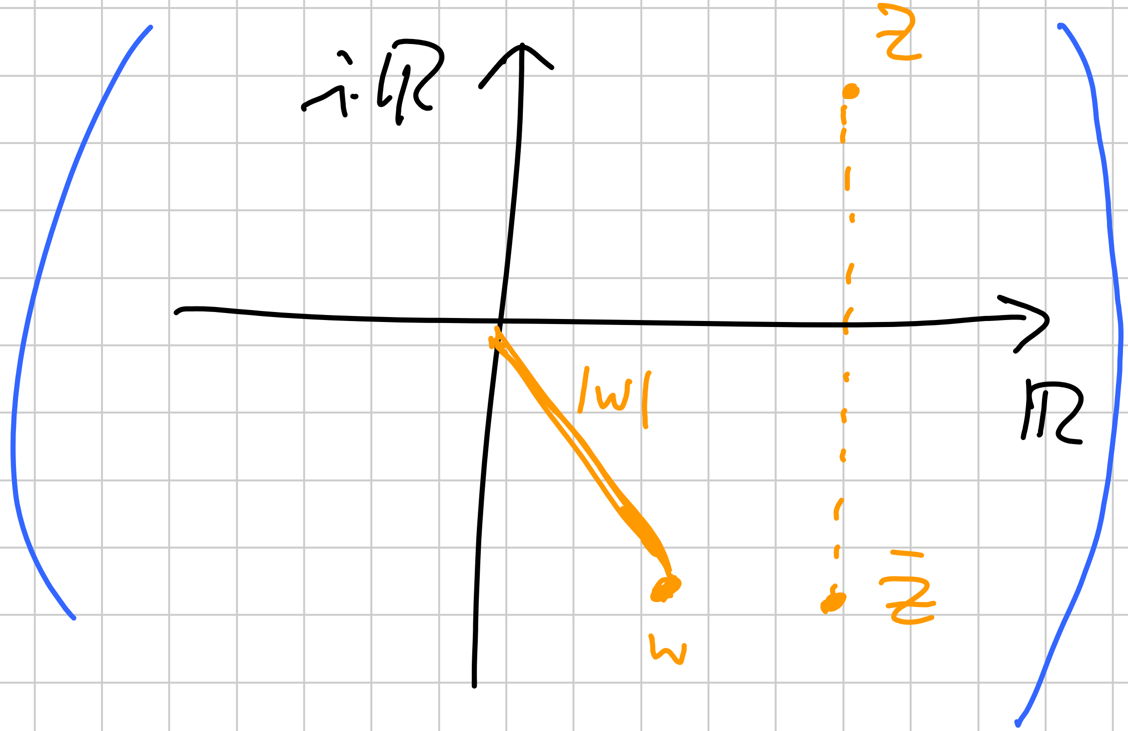
<u>Oss</u>: $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,

$\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

$$|z\cdot w| = |z|\cdot|w| ,$$

$$|z|^2 = z\cdot\bar{z} ,$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{se } z\neq 0 ,$$



$$|\bar{z}| = |z|$$

$$(\bar{z})^{-1} = \overline{(z^{-1})} \quad \text{se } z\neq 0$$

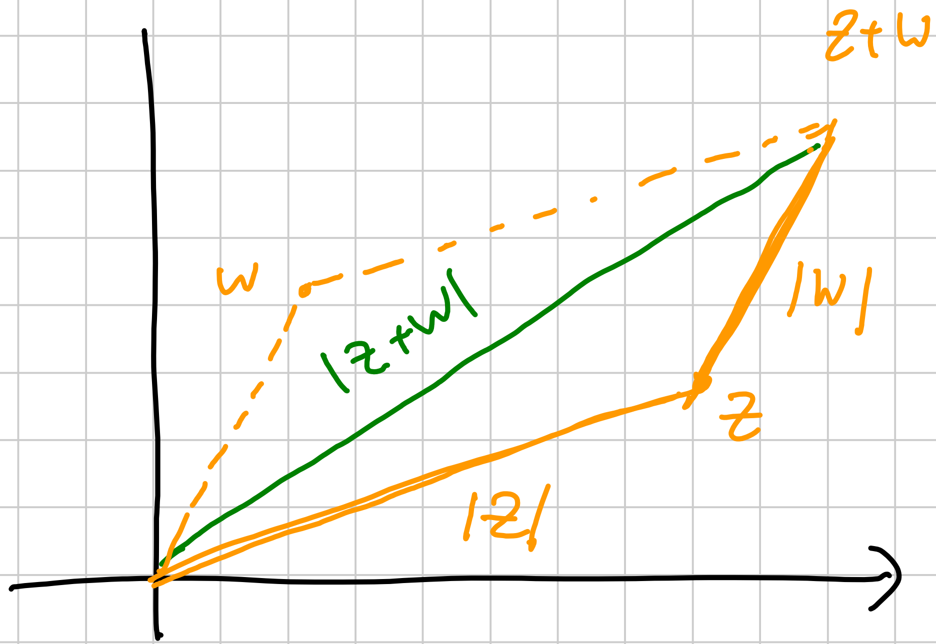
$$|z^{-1}| = |z|^{-1} \quad \text{se } z\neq 0 .$$

Oss: $\forall z \in \mathbb{C}$

$$|Re(z)| \leq |z| \quad , \quad |Im(z)| \leq |z| \quad , \quad |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)| .$$

Prop: $|z+w| \leq |z| + |w|$

(disuguaglianza triangolare)



Dim: $|z+w|^2 = (z+w)\cdot\overline{(z+w)} = (z+w)(\bar{z}+\bar{w})$

$$= \underbrace{z\cdot\bar{z}}_{|z|^2} + \underbrace{z\cdot\bar{w} + \underbrace{w\cdot\bar{z}}_{\overline{z\cdot\bar{w}}}}_{2\,\mathcal{R}e(z\cdot\bar{w})} + \underbrace{w\cdot\bar{w}}_{|w|^2} \le (|z|+|w|)^2$$

$$2\,\mathcal{R}e(z\cdot\bar{w}) \le 2\,|z\cdot\bar{w}| = 2\,|z|\cdot|\bar{w}| = 2\cdot|z|\cdot|w|$$

∎