Algebra Lineare 3/12/13

Appelli scritti: 8/1, 27/1, 15/2 _

* Iscriversi su Moodle

www.questionario.unipi.it COMPILARLO

(Sembra di NO: controllare)

<u>Teo</u> (orlati) : $A \in M_{m \times n}$; B sottomatr. $r \times r$ t.c.

- $\det(B) \neq 0$ • $\det(B') = 0$ $\forall B'$ orlata di B

$\Longrightarrow \operatorname{rank}(A) = r$.

———— o ————

$A \in M_{m \times n}$ $\qquad\qquad \mathbb{R}^{m \times 1}$

$\dim(\operatorname{Span}(\text{colonne})) \subset \mathbb{R}^{m}$ $= \operatorname{rank}(A)$

"rango per colonne"

$=$ max num. colonne che sono un sist. lin. indip

$\dim(\mathrm{Span}(\text{righe})) \subset \mathbb{R}^{1\times n}$ = max numero di righe che sono un sist. lin. indip

rango per righe

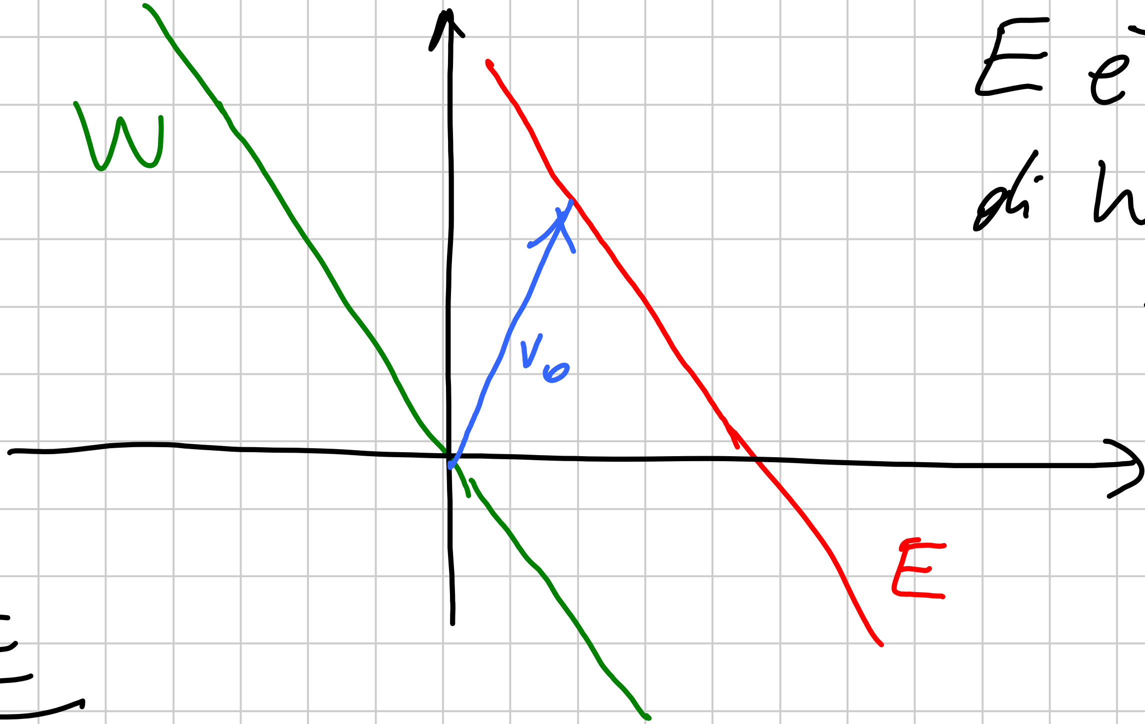
Cor: il rango per righe è uguale al rango per colonne.

Sottospazi affini

<u>Def</u>: Se V è spazio vettoriale, $E \subset V$ è detto sottospazio affine se esistono $v_0 \in V$, $W \subset V$ stsp. vett. t.c. $E = \{v_0 + w ; w \in W\}$; scrivo $E = v_0 + W$.

nuovo

Cioè:



E è il traslato di W rispetto al vettore v_0

Dato E

Q1: v_0 è unico?

Q2: W è unico?

A1: no: va bene ogni vettore in E; A2: SI

Prop: Sia $E = v_0 + W$; allora

$E = u_0 + Z \iff u_0 \in E,\ Z = W$

(**Def:** chiamiamo W giacitura di E).

Dim: $\underbrace{\Rightarrow}$

$u_0 = u_0 + 0 \in u_0 + Z = E \Rightarrow u_0 \in E$ ✓

$u_0 \in E = v_0 + W \Rightarrow u_0 = v_0 + w_0$ con $w_0 \in W$;

se $z \in Z$ ho $u_0 + z \in E \Rightarrow u_0 + z = v_0 + w$ con $w \in W$

$\Rightarrow z = v_0 - u_0 + w = -w_0 + w \Rightarrow z \in W$

Ho dimostrato $Z \subset W$ e analog. $W \subset Z$

$\Rightarrow Z = W$.

$\Leftarrow$ $u_0 \in E \Rightarrow u_0 = v_0 + w_0$

$$v_0 + W = \{v_0 + w : w \in W\} = \{u_0 - w_0 + w : w \in W\}$$
$$= \{u_0 + w' : w' \in W\} = u_0 + W = E.$$

$\boxed{\checkmark}$

Oss: E sttsp. aff $\Rightarrow E \neq \emptyset$.

Sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$

<u>Es</u>: Se il sistema $A \cdot x = b$ ha soluz. allora l'insieme delle soluz. è un stsp. affine: è

$$x_0 + \operatorname{Ker}(A) \quad \text{con } x_0 \text{ soluz. particolare.}$$

<u>Def</u>: $E \subset \mathbb{R}^n$ stsp. affine. Diciamo:

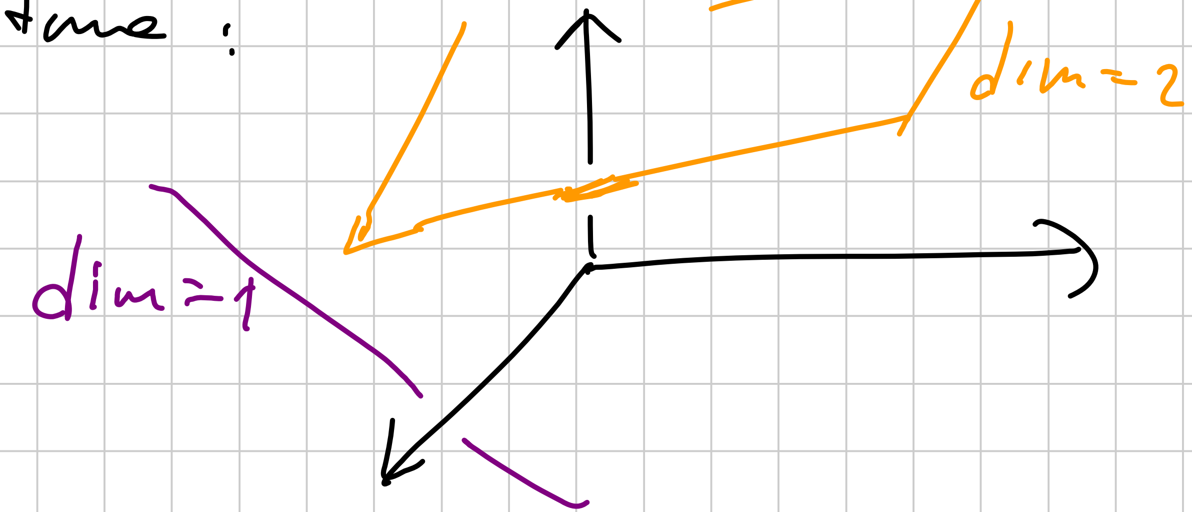
- presentazione cartesiana (o tramite equaz. cartesiane) l'espressione di E come $\{x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{A \cdot x = b}\}$

Se $A \in M_{m \times n}$ si tratta di m equaz. lineari nelle coordinate cartesiane $x_1, \dots, x_n$

- presentazione parametrica: l'espressione di E come $v_0 + \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$, cioè

$$E = \{ v_0 + t_1 w_1 + \dots + t_k w_k \; : \; \underbrace{t_1, \dots, t_k}_{k \text{ parametri liberi}} \in \mathbb{R} \}$$

Def: chiamo $\dim(E)$ la dimensione della sua giacitura:



Prop: sia $E \subset \mathbb{R}^n$ sottosp. aff. di dim d; allora E ammette

- presentaz. param. con d parametri e anche con qualsiasi numero $k \geq d$ di parametri
- presentaz. cartesiana con $n-d$ equazioni e anche con qualsiasi numero $m \geq n-d$ di equazioni.

Dim: • Se $E = v_0 + W$ scelgo base $w_1, \dots, w_d$ di W e ho $E = v_0 + \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_d)$; aggiungendo altri vettori a caso di W ottengo $E = v_0 + \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$.

- Prendo base $w_1, \dots, w_d$ di W. Mi serve A t.c. $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_d)$; se completo $w_1, \dots, w_d$ a base $w_1, \dots, w_n$ di $\mathbb{R}^n$ so che esiste una e una sola $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ t.c.

$$f(w_j) = \begin{cases} 0 & j = 1, \dots, d \\ e_{j-d} & j = d+1, \dots, n \end{cases}$$

Per costruzione ho $\mathrm{Ker}(f) = W$ e pongo

$A = [f]^{\mathcal{E}_{n-d}}_{\mathcal{E}_n} \in M_{(n-d)\times n}$; $b = A \cdot v_0$.

Aggiungendo equaz. che sono comb. lin. delle $n-d$ trovate ne ottengo qualsiasi numero m . $\boxed{\text{☒}}$

<u>Cor</u>: Se $E = v_0 + \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$ allora $\dim E \leq k$. Se $E = \{x : A \cdot x = b\}$

$A \in M_{m \times n}$ e $E \neq \emptyset$ allora $\dim E \geq n - m$.

— o —

Poiché ogni sottosp. aff. di $\mathbb{R}^n$ ha presentazioni sia parametriche che cartesiane abbiamo:

Q: Come si passa dalle une alle altre?

In generale:

"Cart $\rightsquigarrow$ Param" = "risolvere il sistema"

"Param $\rightsquigarrow$ Cart" = "eliminare i parametri"

Es: E: $\begin{cases} 7x + 3y - 2z + 4w = 9 \\ 2x - 5y - 4z + 7w = -2 \end{cases}$ ✓

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2}y + 2z - \frac{7}{2}w - 1 \\ \frac{41}{2}y + 10z - \frac{41}{2}w = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = y + \frac{20}{41}z - \frac{32}{41} \\ x = \pi \cdot y + e \cdot z + \sqrt{17} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{17} \\ 0 \\ 0 \\ -32/4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ 1 \\ 20/41 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathcal{E}s$:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} : t, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t + 5\lambda \checkmark \\ y = 2 + 3t - 2\lambda \\ z = -1 + 4t + 3\lambda \\ w = 3 - t + 7s \checkmark \end{cases} \qquad \begin{cases} t = -w + 3 + 7s \\ x = -2w + 7 + 19s \quad \checkmark \\ \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \frac{1}{19}(x + 2w - 7) \\ t = \frac{1}{19}(5w + 7x + 50) \end{cases}$$

Sostituendo ho 2 equazioni in x, y, z, w

$\Longrightarrow$ sono le equaz. cart. cercate

Rette in $\mathbb{R}^2$

Cart : $\alpha x + \beta y = \gamma$ (ok se α, β non entrambi nulli)

Param : $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ (ok se a, b non entrambi nulli)

Cart $\to$ Param : $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \alpha x + \beta y = \gamma \right\} = \left\{ \frac{\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

Param $\to$ Cart: $\left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : bx - ay = bx_0 - ay_0 \right\}$

Rette per O in $\mathbb{R}^3$

Param: $\quad t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\quad$ OK se a, b, c non tutti nulli

Cart:

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0 \end{cases}$$

ok se

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = 0$$

(cioè: le equaz. sono lin. indip; voli

$\iff$ $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ $\quad \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1$ $\quad \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1$

non tutti 0

Param $\longrightarrow$ Cart

$$\left\{ t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} bx - ay = 0 \\ cx - az = 0 \\ cy - bz = 0 \end{cases} \right\}$$

<u>Oss</u>: $\det \begin{pmatrix} b & -a & 0 \\ c & 0 & -a \\ 0 & c & -b \end{pmatrix} = -abc + abc = 0$

e ho sottomatrici $\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ $\det = a^2$

$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$ det $= -b^2$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ det $= -c^2$

$\Longrightarrow$ ha rango 2

$\Longrightarrow$ una delle 3 equaz. è sempre superflua

(ne scrivo 3 perché non so quale è superflua).

Cart $\longrightarrow$ Param $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0 \end{cases}$

(cerco soluz. non nulla): osservo

$$0 = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \left(\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 \right) + \beta_1 \left(-(\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1) \right) + \gamma_1 \left(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \right)$$

$$0 = \det \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = \alpha_2 \cdot \left(\qquad \right) + \beta_2 \cdot \left(\qquad \right) + \gamma_2 \left(\qquad \right)$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 \\ -(\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1) \\ \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \end{pmatrix}$$ è una soluz. non nulla

Ricetta: la soluz di $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0 \end{cases}$

si ottiene da

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

facendo i det delle sottomatr. 2×2
e cambiando di segno al secondo

Piani in $\mathbb{R}^3$ (per 0)

Param. $t_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ (ok se $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 2$,

cioè $a_1 b_2 - a_2 b_1$, $a_1 c_2 - a_2 c_1$, $b_1 c_2 - b_2 c_1$ non tutti 0

Cart. $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ $\quad \alpha, \beta, \gamma$ non tutti 0

Cart $\to$ Param

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \right\} = \mathrm{Span}\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ -\beta \end{pmatrix}}_{\text{uno dei tre si scarta}} \Bigg)$$

Param $\to$ Cart

Dati $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ cerco une equaz. di cui essi siano soluz:

$$0 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1)\cdot a_1 - (a_1c_2 - a_2c_1)\cdot b_1$$
$$+ (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_1$$

$$0 = \det \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_2 \\ b_2 & b_1 & b_2 \\ c_2 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = (\quad)\, a_2 - (\quad)\, b_2$$
$$+ (\quad)\, c_2$$

$\Longrightarrow$ ricetta (i coeff sono i det 2×2 di

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$ col secondo cambiato di segno).

Es: $\ell : \begin{cases} 3x - 5y + 7z = 0 \\ 8x + 2y - 9z = 0 \end{cases}$

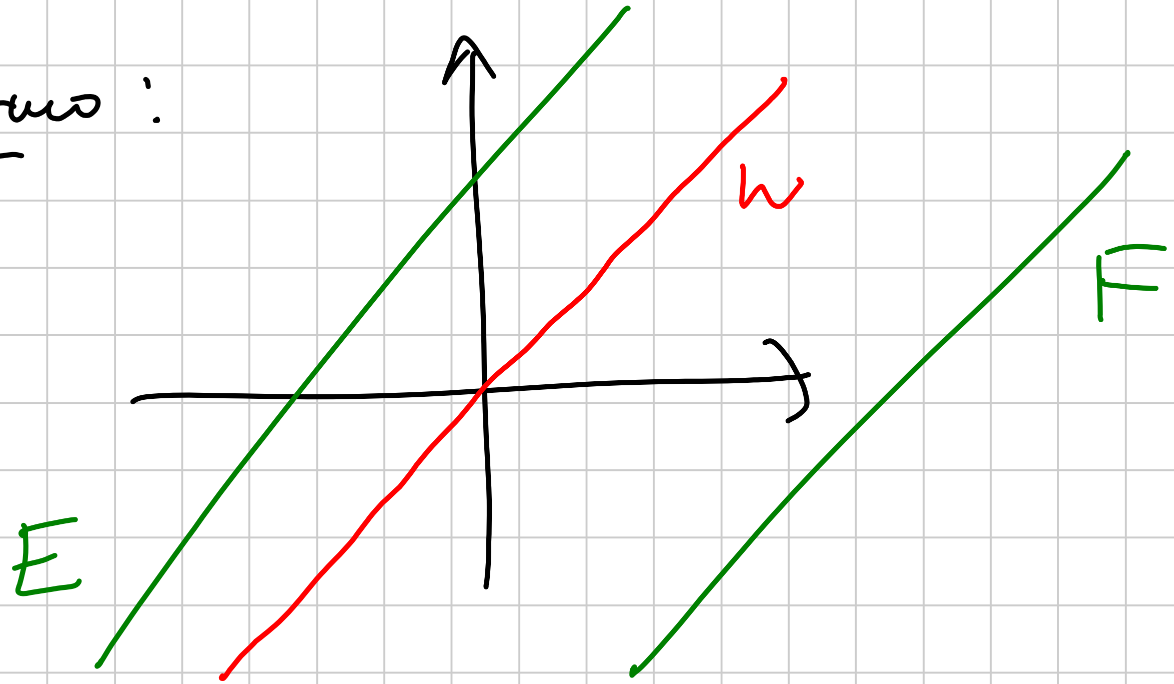
$\Longrightarrow \ell = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 31 \\ 83 \\ 46 \end{pmatrix}$

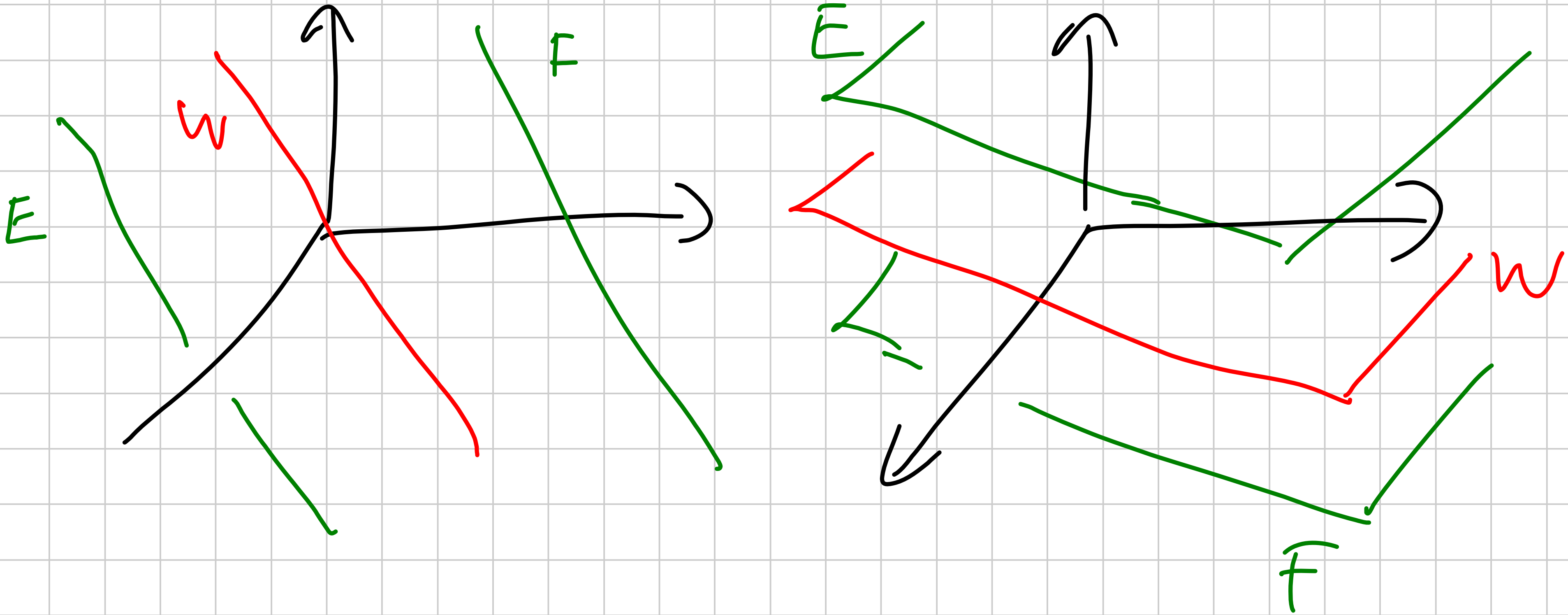
Es: $P = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$

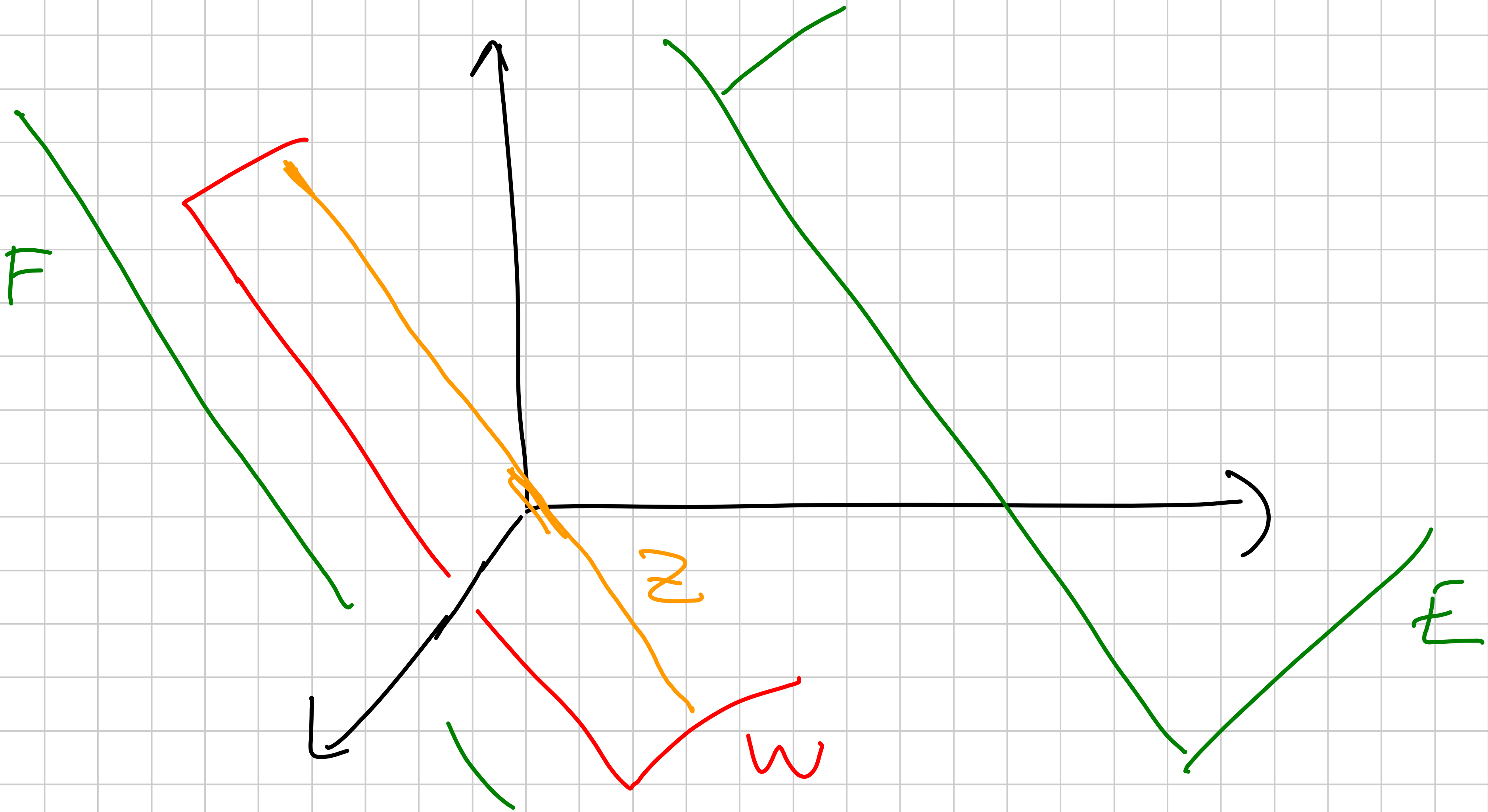
$\Longrightarrow P : 30x - 30y + 10z = 0$ cioè $3x - 3y + z = 0$.

Caso generale di stsp. affini di V sp. vett.

Parallelismo:




E
W
F
E
W
F


F
z
W
E

Def : $E = v_0 + W$, $F = u_0 + Z$

sono detti <u>paralleli</u>, scrivo $E \parallel F$ se

$W \subset Z$ oppure $Z \subset W$ _

<u>Somme</u> :

<u>Def</u> : Indico con $E+F$ il più piccolo
sttsp. affine di V che contiene $E \cup F$

(Esercizio: $E \cap F$ è sempre sttsp. affine; $E \cup F$ lo è solo se $E \subset F$ oppure $F \subset E$.)

Versione affine di Grassmann:

E, F sttsp. aff. $\nearrow$ $E \cap F \neq \emptyset \rightsquigarrow$ tutto come prima

$\searrow$ $E \cap F = \emptyset \rightsquigarrow$ Prop

$u_0 \in E \cap F \Rightarrow E = u_0 + W$

$$F = u_0 + Z$$

$$E \cap F = u_0 + (W \cap Z)$$

$$E + F = u_0 + (W + Z)$$

$\Longrightarrow \dim(E+F) + \dim(E \cap F) = \dim E + \dim F.$

Prop: Se $E = u_0 + W$, $F = v_0 + Z$, $E \cap F = \emptyset$

$\Rightarrow \dim(E+F) = 1 + \dim(W+Z)$.

__Dim__: Affermo: (1) $u_0 - v_0 \notin W+Z$

(2) $E+F$ ha giacitura $\mathrm{Span}(u_0 - v_0) + (W+Z)$

Questo basta. Li provo:

(1) Se t.a. $u_0 - v_0 \in W + Z$ ho $u_0 - v_0 = w + z$

$$\Rightarrow \underbrace{u_0 - w}_{\substack{\cap\\ E}} = \underbrace{v_0 + z}_{\substack{\cap\\ F}} \quad \Rightarrow E \cap F \neq \emptyset$$

(2) Pongo $T = u_0 + \mathrm{Span}(u_0 - v_0) + (W + Z)$.

$$T \supset u_0 + W = E \; ; \quad T \supset u_0 + (v_0 - u_0) + Z$$
$$= v_0 + Z = F$$

Se S è sttsp. affine $S = u_0 + X$ e

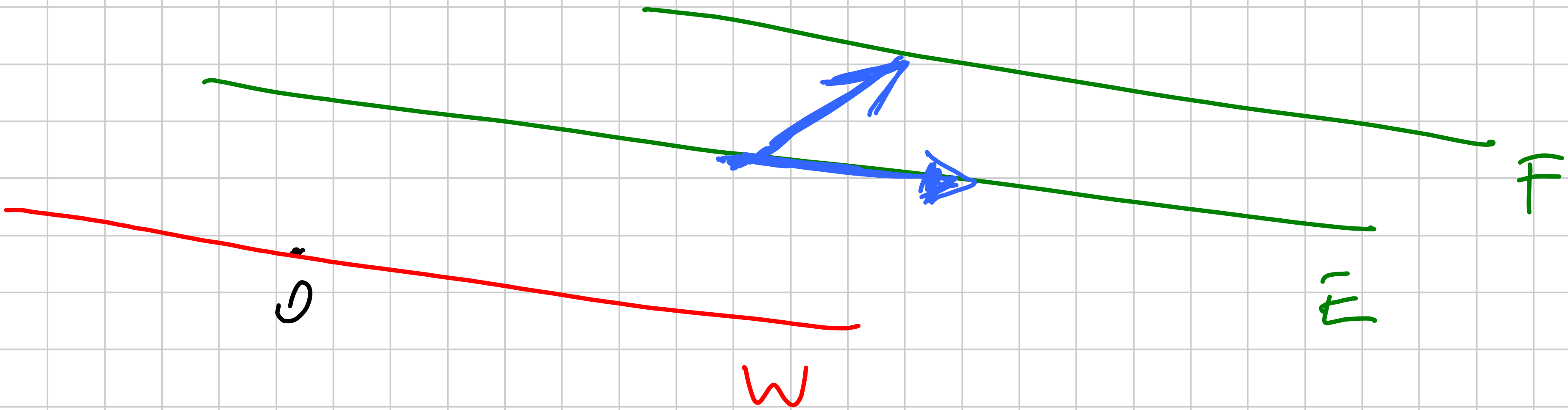
$S \supset E \cup F$;

$$S \supset E \Rightarrow X \supset W$$
$$S \ni v_0 \Rightarrow X \ni v_0 - u_0$$
$$S \supset F \Rightarrow X \supset Z$$

$$\Big\} X \supset \mathrm{Span}(u_0 - v_0) + (W + Z)$$
$$\Rightarrow S \supset T.$$

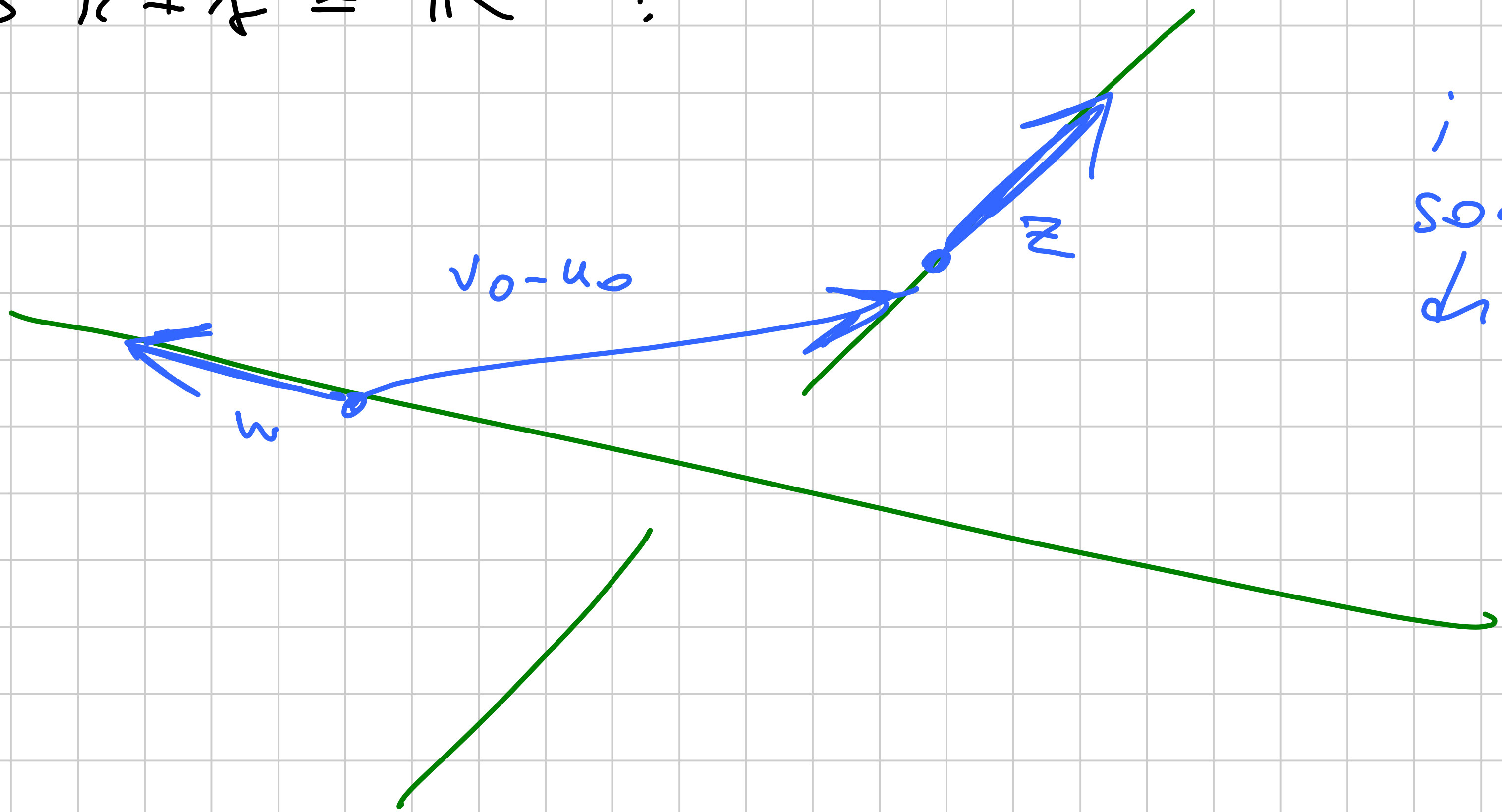
$\blacksquare$

Es: $\pi, \sigma \subset \mathbb{R}^3$ parallele :



Es: $r, s \subset \mathbb{R}^3$ sghembe (disgiunte non par)

$\Longrightarrow r + s = \mathbb{R}^3$:



i tre vett. sono base di $\mathbb{R}^3$