Esercizi 6/12/13

1)(b) $\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 7 & 4 & -3 \end{pmatrix} = 0$, $\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow$ rango della matrice dei coefficienti $= 2$

$\Rightarrow$ E — ϕ / — è una retta.

Poiché $\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 0$, per il teorema degli orlati la matrice completa ha rango $= 2$

$\Rightarrow$ E $=$ 1 retta.

Per trovare eq.ni parametriche possiamo risolvere le prime due equazioni rispetto ad x, y :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+4z & 3 \\ -1-5z & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2-8z+3+15z}{-4-9} = \frac{7z+1}{-13}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1+4z \\ 3 & -1-5z \end{vmatrix}}{-13} = \frac{-2-10z-3-12z}{-13} = \frac{22z+5}{13}$$

$$\Rightarrow E = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{7}{13}z - 1/13 \\ 22/13\, z + 5/13 \\ z \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -1/13 \\ 5/13 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\uparrow}{\mathrm{Span}} \begin{pmatrix} -7 \\ 22 \\ 13 \end{pmatrix}$$

giacitura

1) (d) $\qquad E : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -3+5t \\ z = 4-3t \end{cases} \subset \mathbb{R}^3$

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim E = 1$$

$$t = (4-z)/3 \rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}(4-z) \\ y = -3 + \frac{5}{3}(4-z) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + 2z = 11 \\ 3y + 5z = 11 \end{cases}$$

1) (h) $\quad B = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -3 & 4 & 3 \\ 5 & -16 & 18 & -5 & -9 \end{array}\right)$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & -16 & 18 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & -16 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 5 & -16 & -9 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

rango della matrice dei coeff. =
rango della matrice completa = 2

$\Rightarrow \quad E \neq \emptyset \quad$ e $\quad \dim E = 4 - 2 = 2$

Per trovare eq.ni parametriche risolviamo le prime 2 eq.ni risp. ad x, y:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1-4z-w & -2 \\ 3+3z-4w & 5 \end{vmatrix}}{19} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + w \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}}{19} =$$

$$= \frac{1}{19}\left(1 - 14z - 13w\right)$$

$$y = \frac{1}{19} \begin{vmatrix} 3 & -1-4z-w \\ 2 & 3+3z-4w \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{19}\left(11 + 17z - 10w\right)$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{19}, 11/19, 0, 0\right) \in E$,

giacitura di $E = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -14/19 \\ 17/19 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13/19 \\ -10/19 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

1)(l) traccia:
"risolvere" le ultime due equazioni rispetto a t, s, ottenendo espressioni in z, w, e sostituire tali espressioni al posto di t, s ottenendo due equazioni in x, y, z, w.

2)(e) $rg\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$

E è una retta. La giacitura di E è generata da

$$\left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -7, -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -11, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -1 \right),$$

quindi è diversa dalla giacitura di F: $\text{Span}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Quindi E, F sono rette non parallele. $E \cap F$: sostituiamo i valori di x, y, z nelle equazioni di E:

$$\begin{cases} 3(3+5t) - 2(-1+2t) + 7 - 3t = -1 \\ 4(3+5t) - 3(-1+2t) + 5(7-3t) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \overbrace{(15-4-3)}^{8} t + \overbrace{9+2+7}^{18} = -1 \Leftrightarrow t = -19/8 \\ \underbrace{(20-6-15)}_{-1} t + \cancel{12} + \underbrace{3+35}_{38} = \cancel{12} \Leftrightarrow t = 38 \end{cases} \quad \neq$$

$\Rightarrow E \cap F = \emptyset. \Rightarrow E, F$ rette sghembe

$\Rightarrow \dim(E+F) = 1 + \dim(giac(E) + giac(F)) = 3$

2)(h): $giac(E) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$

$\Rightarrow \dim E = 2$

5

$$rg\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -5 \\ -1 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$$

il sistema ha soluzioni, e $\dim F = 2$.

$E \cap F$:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z - 5w = \;& 9 + 6t - 3s \\ & + 2 - 10t + 8s \\ & + 4 - 8t + 12s \\ & - 25 + 15t - 20s \\ \hline & -10 + 3t - 3s = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x + 3y - 4z + 2w = \;& -3 - 2t + s \\ & -3 + 15t - 12s \\ & -4 + 8t - 12s \\ & 10 - 6t + 8s \\ \hline & 0 + \cancel{15}_{5}t - \cancel{15}_{5}s = \cancel{3}_{1} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3(t-s) = 11 \\ 5(t-s) = 1 \end{cases}$$ <— non ha soluzioni. $\Rightarrow E \cap F = \emptyset$

$\dim(\text{giac}(E) + \text{giac}(F)) = ?$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4z+5w & -2 \\ +4z-2w & 3 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-4z+11w}{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -4z+5w \\ -1 & 4z-2w \end{vmatrix}}{7} = \frac{8z-w}{7}$$

$$\Rightarrow \text{giac}(F) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -4/7 \\ 8/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11/7 \\ -1/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Span}(f_1, f_2)$$

$$\text{giac}(E) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \text{Span}(e_1, e_2)$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4/7 & 11/7 \\ 5 & -4 & 8/7 & -1/7 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [\text{conti...}] = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -4 & 8/7 & -1/7 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -48/7 \neq 0$$

$$\Rightarrow \dim\left(\text{giac}(E) + \text{giac}(F)\right) = \dim \text{Span}(f_1, f_2, e_1, e_2)$$

$$= 3$$

$$\Rightarrow \dim(E + F) = 1 + 3 = 4$$

3) $v_1 \in V$?

$$i \cdot 2 + (1-i) \cdot i - 2(1+i) + (i-1)(-1) =$$

$$= 2i + i + 1 - 2 - 2i - i + 1 = 0 \checkmark$$

$$V = \{ z_3 = (i z_1 + (1-i) z_2 + (i-1) z_4)/2 \}$$

$$\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \\ z_4 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ è non singolare $\Rightarrow$

base di $V = \left\{ v_1 , \begin{pmatrix} (1-i)/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} (i-1)/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

4) La verifica che V contiene i vettori è meccanica, e si fa come nell'esercizio 3), sostituendo e usando il fatto che $i^2 = -1$.

Sappiamo che $\dim V = 3$, quindi dobbiamo estrarre 3 vettori lin. indip. ti.

$$5 = (2-i)\cdot\lambda \Rightarrow \lambda = 5\cdot(2-i)^{-1} = \frac{5\cdot(2+i)}{5} = 2+i$$

$(2+i)\cdot 3i = 6i - 3$ ✓

$(2+i)\cdot 2i = 4i - 2$ ✓

$(2+i)\cdot(3-i) = 7 + i \neq 3 - i \Rightarrow$ i primi due vettori sono indip. ti –

$$\begin{vmatrix} 3i & 6i-3 & i \\ 2i & 4i-2 & 2 \\ 3-i & 3-i & 1-i \end{vmatrix} \overset{\mathrm{II}C \to \mathrm{II}C - (2-i)\mathrm{I}C}{=} \begin{vmatrix} 3i & 0 & i \\ 2i & 0 & 2 \\ 3-i & -4-2i & 1-i \end{vmatrix} =$$

$= (4+2i)\cdot(6i+2) = -4 + 28i \neq 0 \Rightarrow$

i primi tre vettori sono una base di V.

5) (a)

$$\det\begin{pmatrix} 4 & -i \\ 1+i & 2-i \end{pmatrix} = 7-3i \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -i \\ 1+i & 2-i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7-3i}\begin{pmatrix} 2-i & i \\ -1-i & 4 \end{pmatrix} = \frac{7+3i}{58}\cdot\begin{pmatrix} 2-i & i \\ -i-1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 17/58 - i/58 & -3/58 + \frac{7i}{58} \\ -\frac{2}{29} - \frac{5i}{29} & 14/29 + \frac{6i}{29} \end{pmatrix}$$

6) (c)

$$\begin{vmatrix} 1-i & 2i \\ 2+i & 1+2i \end{vmatrix} = 1-i+2i+2-4i+2 = 5-3i \neq 0$$

$\Rightarrow$ la matrice dei coefficienti ha rango 2

$\Rightarrow E \neq \phi \Rightarrow \underline{E}$ è una retta complessa.

Le equazioni parametriche si trovano risol-vendo il sistema rispetto a z_1, z_2 tramite Cramer:

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} i - t\cdot(4-i) & 2i \\ -2-t(1+i) & 1+2i \end{vmatrix}}{5-3i} = \text{etc...} \\[2ex] z_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1-i & i-t(4-i) \\ 2i & -2-t(1+i) \end{vmatrix}}{5-3i} = \text{etc...} \\[2ex] z_3 = t \end{cases}$$

6) (d) $\begin{vmatrix} 1+i & 3i \\ 2+i & 2i \end{vmatrix} = 2i - 2 - 6i + 3 = 1 - 4i \neq 0$

$\Rightarrow$ rango(matrice dei coefficienti) $=$ rango(matrice completa) $= 2$

$\Rightarrow E \neq \emptyset, \quad \dim E = 4 - 2 = 2$

Equazioni parametriche si ricavano risolvendo il sistema con Cramer rispetto a z_1, z_2 e ponendo $z_3 = u$, $z_4 = v$ (ad esempio).

6) (e) E è una retta, con giacitura

$$\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1+i \\ -4i \\ 7 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{cases} -4i\, z_1 - (1+i)\, z_2 = 0 \\ 7 \cdot z_2 + 4i\, z_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

perché il sistema ha rango 2

Sostituendo $z_1 = -1$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = 2i$ nelle equazioni si ottengono i valori $2i$ e $-1+7i$

$$\Rightarrow \quad E : \begin{cases} -4i\, z_1 - (1+i)\, z_2 = 2i \\ 7 z_2 + 4i\, z_3 = -1+7i. \end{cases}$$

2) (c) $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow E \cap F =$ una retta

poiché E, F sono piani, $E \not\subset F$, $F \not\subset E$ e $E \not\parallel F$.

Poiché $E \cap F \neq \emptyset$,

$$\dim(E + F) = \dim(\mathrm{giac}(E) + \mathrm{giac}(F)) = 3$$