Esercizi 8/11/13

1. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 29 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

$$f_{A\cdot B}(x) = \begin{pmatrix} 5 & 29 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$f_B(x) = B \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$f_A(f_B(x)) = A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 \\ 22 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

2. $A \cdot (X+Y) \cdot B = (AX + AY)B = AXB + AYB \quad \checkmark$

$$A(\lambda X)B = \lambda(AXB) \checkmark$$

Scriviamo B come unione di colonne: $B = (B^1, \dots, B^h)$. Allora $\operatorname{Im} B = \operatorname{Span}(B^1, \dots, B^h)$, e $X(\operatorname{Im} B) = \operatorname{Span}(XB^1, \dots, XB^h) \subseteq \operatorname{Ker} A$ $\Leftrightarrow A(XB^1) = \dots = A(XB^h) = 0$. Ma

$$A \cdot X \cdot B = A \cdot (XB^1, \dots, XB^h) = (A(XB^1), \dots, A(XB^h)),$$

e quindi $X(\operatorname{Im} B) \subseteq \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow X \in \operatorname{Ker}(f)$.

3. La mappa

$$g : X \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{è lineare}$$
$$x \longmapsto A \cdot x$$

perché restrizione della mappa $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$

che è lineare.

Devo verificare che $Ax \in X \quad \forall x \in X$:

Se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Ax = \begin{pmatrix} 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 \\ -7x_1 + x_2 - 9x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$

La somma delle coordinate di Ax fa

$(-2) \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$, che svanisce

se $x \in X$. Quindi $x \in X \Rightarrow Ax \in X$.

4. $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 3a-4c & 3b-4d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2a+3b & a-4b \\ 2c+3d & c-4d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3b - c = 0 \longrightarrow c = 3b \\ a - 6b - d = 0 \qquad a = 6b - d \\ \cancel{3}a - \cancel{6}^{2}c - \cancel{3}d = 0 \\ 3b - c = 0 \end{cases}$$

$\}$ equiv.ti alle prime due

$\Rightarrow$ l'insieme è $\left\{ \begin{pmatrix} 6b-d & b \\ 3b & d \end{pmatrix} \mid b, d \in \mathbb{R} \right\}$.

5. Se A è $m \times n$, B è $r \times s$, affinché $A \cdot B$, risp.te $B \cdot A$ esista si deve avere $n = r$, risp.te $m = s$. Allora $A \cdot B$ è $m \times m$ e $B \cdot A$ $n \times n$. Affinché si possa avere $A \cdot B = B \cdot A$ si deve inoltre avere $m = n$.

In conclusione, A e B devono essere entrambe quadrate e dello stesso ordine.

6. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

$$AB = BA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax_1 + bx_3 & ax_2 + bx_4 \\ cx_1 + dx_3 & cx_2 + dx_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ax_1 + cx_2 & bx_1 + dx_2 \\ ax_3 + cx_4 & bx_3 + dx_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cancel{a x_1} + b x_3 = \cancel{a x_1} + c x_2 \\ a x_2 + b x_4 = b x_1 + d x_2 \\ c x_1 + d x_3 = a x_3 + c x_4 \\ c x_2 + \cancel{d x_4} = b x_3 + \cancel{d x_4} \end{cases} \iff$$

il s.i. cercato è sempre un sottospazio

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{cases} b x_1 + (d-a) x_2 - b x_4 = 0 \\ c x_1 + (d-a) x_3 - c x_4 = 0 \\ c x_2 - b x_3 = 0 \end{cases}$$

$c\,\mathrm{I} - b\,\mathrm{II}$: $(d-a)\cdot(c x_2 - b x_3) = 0$

$\Rightarrow$ se $a \neq d$ l'insieme è dato da due equazioni lineari nelle componenti $\Rightarrow$ è nucleo di una mappa $\varphi : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ lineare $4 = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \underset{\overset{\wedge}{2}}{\dim \operatorname{Im} \varphi}$ è un s.s. vettoriale W, $\dim W \geq 2$

Se $d = a$ le equazioni diventano:

$$\begin{cases} b(x_1 - x_4) = 0 \\ c(x_1 - x_4) = 0 \\ c x_2 - b x_3 = 0 \end{cases}$$

$b \neq 0 \Rightarrow$ $W = \{ x_1 = x_4 ,\ x_3 = \frac{c}{b} x_2 \}$ $\Rightarrow \dim W = 2$

$c \neq 0 \Rightarrow W = \{ x_1 = x_4 ,\ x_2 = b/c \cdot x_3 \}$ $\Rightarrow \dim W = 2$.

$b = c = 0 \Rightarrow A = a \cdot I$ e $W = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

questo è l'unico caso.

Rimane da verificare che $\dim W \neq 3$ in ogni caso. Per quanto visto, questo è possibile solo se $a \neq d$. In questo caso, la mappa φ è data da:

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b x_1 + (d-a) x_2 - b x_4 \\ c x_1 + (d-a) x_3 - c x_4 \end{pmatrix}$$

Quindi $\operatorname{Im}\varphi$ contiene

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d-a \\ c \end{pmatrix} \text{ e } \varphi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d-a \end{pmatrix}$$

Poiché $d-a \neq 0$, questi due vettori generano $\mathbb{R}^2$, quindi $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^2$ e

$$W = \operatorname{Ker}\varphi \text{ ha dimensione } 4-2=2$$

Quindi W non ha mai dimensione 3.