Esercitazioni del 6/11/13

Esercizi del 25/10/13

Esercizio 1

(a) Aggiungiamo $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Verifichiamo che

v_1, v_2, v_3, v_4 sono una base di $\mathbb{R}^4$ controllando che sono lin. indipendenti:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = \begin{pmatrix} 4\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 \\ 5\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_4 \\ -6\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + 7\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

perché $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ sono lin. indip.ti.

$\Rightarrow \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ (dalle prime due equazioni).

(b) È facile verificare che $v_3 = 2v_1 - v_2$, quindi non è possibile completare v_1, v_2, v_3 a base di $\mathbb{R}^4$, perché sono lin. dipendenti.

(c) L'equazione che definisce V è:

$$x_4 = 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3$$

Aggiungiamo a $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ i vettori

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} \in V.$$

$V \neq \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim V \leq 3$. Ma

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_1 \\ 2\lambda_2 + \frac{3}{2}\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow \dim V = 3$ e

v_1, v_2, v_3 è una base di V.

(f) $V: \begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 5x_2 = x_3 - x_4 \end{cases}$ Risolvendo

rispetto a x_1, x_2: $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 2x_4 \\ x_2 = x_3 - x_4 \end{cases}$

$$\Rightarrow V = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_3 + 2x_4 \\ x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\Rightarrow$ base di V: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim V = 2$

Aggiungiamo a $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ il vettore $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$,

non proporzionale $\Rightarrow v_1, v_2$ base di V.

(h) polinomi di grado diverso sono lin. indip. ti. v_1, v_2, v_3 hanno gradi 4, 7, 3 risp.te. $\Rightarrow$ aggiungendo $1, t, t^2, t^4, t^5, t^6, t^8, t^9, \dots$ si ottiene una base di $\mathbb{R}[t]$.

(i) $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[t]$. Posto $v_4 = 1$, facendo i conti si verifica: $a v_1 + b v_2 + c v_3 + d v_4 = 0$ $\Rightarrow a = b = c = d = 0$. Poiché $\dim V = 4$, v_1, v_2, v_3, v_4 base.

Esercizio 2

(a) $v_2 = -\frac{3}{2} v_1$, v_1, v_3 indipendenti.

$v_4 = v_2 - v_3$, v_1, v_3, v_5 indipendenti:

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{cases} 4a + 5b + 3c = 0 \\ 6a - 7b + c = 0 \\ -10a + 2b - 2c = 0 \end{cases} \qquad \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}: \quad 2c = 0$$

$$\mathrm{I}, \mathrm{II} \begin{cases} a + \frac{5}{4} b = 0 \\ a - \frac{7}{6} b = 0 \end{cases} \longrightarrow a = b = 0$$

$\Rightarrow v_1, v_3, v_5$ base di $\mathbb{R}^3$.

(d) $A_3 = \{$matrici anti-simmetriche $3 \times 3\}$ ha dim=3. v_2, v_2, v_3 sono indip. ti, quindi base.

$$\begin{cases} a - 7b + 9c = 0 \\ -3a + 4b - 10c = 0 \\ -2a - b + 3c = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \\ 3\mathrm{I} + \mathrm{II}: \\ 2\mathrm{I} + \mathrm{III}: \end{array} \begin{array}{l} a - 7b + 9c = 0 \\ \begin{cases} -\cancel{17} b + \cancel{17} c = 0 \\ -\cancel{15}^{5} b + \cancel{21}^{7} c = 0 \end{cases} \end{array}$$

$\Rightarrow b \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow b = c = 0 \Rightarrow a = 0$