UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 27/1/14 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $(k+1)x+y-2z+1 = (4x+(1-2k)y+z-3)^2-(x-(k+2)y+3z+2)^2$ definisce un paraboloide iperbolico?

2. In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ due sottospazî proiettivi di dimensione 2 hanno sempre un punto in comune? Giustificare la risposta.

3. Per quali $z \in \mathbb{C}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} z^2+z-i & iz+1 \\ iz^2+iz+1+i & -z-1+i \end{pmatrix}$?

4. Date $A, U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ con A invertibile e U unitaria, si può concludere che $A^{-1}\cdot U \cdot A$ è unitaria? Giustificare la risposta.

5. Esibire i vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali a $5e_1+7e_2-4e_3$, unitarî e aventi somma delle coordinate nulla.

6. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ esibire $p_A(t)$ sapendo che $\mathrm{tr}(A) = -4$, $\det(A) = 5$ e $p_A(-1) = -3$

7. Calcolare $\int_\alpha x^2$ con $\alpha : \left[1, \sqrt{3}\right] \to \mathbb{R}$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ \ln(t) \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 27/1/14 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} k^2+1 & -1 & k+2 \\ k^2-k-1 & k+1 & k+2 \\ -2k & 2k & 2-k \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che $\det(A) = k^2(4-k^2)$.

(B) (3 punti) Sapendo che $p_A(1) = (k^2-1)^2$ determinare $p_A(t)$.

(C) (3 punti) Individuare gli autovalori di A e i valori di k per cui alcuni di essi hanno molteplicità algebrica maggiore di 1.

(D) (3 punti) Stabilire per quali k la A non è diagonalizzabile.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} -s^3-2s^2+s \\ s^3-s^2+3s \\ -2s^3-s^2+4s \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che α è semplice e regolare.

(B) (2 punti) Provare che è regolare anche la proiezione ortogonale di α sul piano di equazione $x+y+z=0$.

(C) (3 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $s=0$.

(D) (2 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $s=0$.

(E) (3 punti) Calcolare $\int_\beta (2x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}z)$, dove β è la restrizione di α a $[0,1]$.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. $k \neq 2$ e $k \neq -\frac{6}{5}$

2. Sì: se W e Z sono sottospazı vettoriali di $\mathbb{R}^5$ e hanno dimensione 3, allora $W \cap Z$ contiene almeno una retta, dunque le proiezioni di W e Z in $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ hanno in comune almeno un punto

3. $z \neq -i$

4. No, ad esempio se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ si ha $A^{-1} \cdot U \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & i-1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ che non è unitaria

5. $\pm\frac{1}{\sqrt{206}}(11e_1 - 9e_2 - 2e_3)$

6. $p_A(t) = t^3 + 4t^2 + t - 5$

7. $\frac{2}{3}(4 - \sqrt{2})$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) Sostituendo alla prima colonna sé stessa più la seconda, e poi alla prima riga sé stessa meno la seconda si ottiene direttamente $-k^2(-2-k)(2-k) = k^2(4-k^2)$

(B) $p_A(t) = t^3 - (4+k^2)t^2 + (4+3k^2)t + k^2(k^2-4)$

(C) Gli autovalori sono k^2, $k+2$ e $2-k$, e non sono distinti per $k = -2, -1, 0, 1, 2$

(D) $k = 1$ e $k = 2$

2.

(A) La seconda componente di $\alpha'(s)$ è sempre positiva

(B) $\alpha'(s)$ non è mai parallelo a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(C) $t = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $n = \frac{1}{5\sqrt{78}} \begin{pmatrix} -43 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$, $b = \frac{1}{5\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$

(D) $\kappa = \frac{5\sqrt{3}}{13\sqrt{26}}$, $\tau = -\frac{18}{25}$

(E) $-\frac{12}{5}$