UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 15/6/13 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizza.

2. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ unitarî, con somma delle componenti nulla e ortogonali a $4e_1+2e_2-3e_3$.

3. Determinare l'intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dei luoghi
$\{[t-3:t+1:-4]:\ t\in\mathbb{R}\}$ e $\{[5+t:1+2t:-3t]:\ t\in\mathbb{R}\}$.

4. Stabilire per quali $t\in\mathbb{R}$ l'equazione $(1+t)x^2-2txy+(2+3t)y^2+2x+2y+1=0$ definisce un'ellisse.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $x^2+xy-yz+x-y-2z-2=0$.

6. Data $f(x,y)=\cos(3x-\log(1+y))$ trovare gli autovalori della matrice hessiana di f nel punto $(0,0)$.

7. Calcolare $\int_\alpha (3y\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y)$ dove $\alpha(t)=(1-t,t^2)$ per $t\in[0,1]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 15/6/13 — Esercizî

1. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ considerare $A = \begin{pmatrix} 4+2i & 1+3i \\ 3i-1 & z \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Stabilire per quali $z \in \mathbb{C}$ esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ che diagonalizza A, verificando in particolare che ciò accade per $z = 4 - i$.

Porre da ora in poi $z = 4 - i$ e definire $B = \frac{1}{2}(A - A^*)$.

(B) (4 punti) Trovare gli autovalori di A e una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizza.

(C) (4 punti) Trovare gli autovalori di B e una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizza.

2. Considerare $\alpha(s) = \begin{pmatrix} \log(s) \\ s + s^2 \\ e^{s-1} \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Trovare il più grande insieme $I \subset \mathbb{R}$ su cui la definizione di α ha senso e provare che $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ è una curva semplice e regolare.

(B) (4 punti) Trovare il riferimento di Frénet di α in $s = 1$.

(C) (3 punti) Trovare curvatura e torsione di α in $s = 1$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta z \, \mathrm{d}y$ dove β è la restrizione di α a $[1, 2]$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. ♡

1. $\lambda_1 = 5,\ v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix};\ \lambda_2 = -3,\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. $\pm\frac{1}{\sqrt{78}}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Il punto $[1 : -1 : 2]$

4. $t < -2$ o $-\frac{1}{2} < t < 1$

5. Iperboloide a una falda

6. -10 e 0

7. $-\frac{5}{6}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $z = 4 + it$ con $t \in \mathbb{R}$

(B) $\lambda_1 = 4 + 4i$, $\lambda_2 = 4 - 3i$
$v_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 - i \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} i - 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

(C) $\lambda_1 = 4i$, $\lambda_2 = -3i$, v_1 e v_2 come sopra

2.

(A) $I = (0, +\infty)$ su cui la prima componente di α è crescente con derivata positiva

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n = \frac{1}{\sqrt{330}} \begin{pmatrix} -17 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $b = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{30}}{11\sqrt{11}}$, $\quad \tau(0) = \frac{7}{30}$

(D) $3e - 1$