UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 15/6/13 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizza.

2. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ unitarî, con somma delle componenti nulla e ortogonali a $3e_1-4e_2+2e_3$.

3. Determinare l'intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dei luoghi
$\{[t+1:-4:t-3]:\ t\in\mathbb{R}\}$ e $\{[1+2t:-3t:5+t]:\ t\in\mathbb{R}\}$.

4. Stabilire per quali $t\in\mathbb{R}$ l'equazione $(1-t)x^2+2txy+(2-3t)y^2+2x+2y+1=0$
definisce un'ellisse.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $y^2-z^2+2xy+2xz-6x+4z=3$.

6. Data $f(x,y)=\cos(2x-\log(1+y))$ trovare gli autovalori
della matrice hessiana di f nel punto $(0,0)$.

7. Calcolare $\int_\alpha (2y\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y)$ dove $\alpha(t)=(1-2t,t^2)$ per $t\in[0,1]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 15/6/13 — Esercizî

1. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ considerare $A = \begin{pmatrix} 5+2i & 1+3i \\ 3i-1 & z \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Stabilire per quali $z \in \mathbb{C}$ esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ che diagonalizza A, verificando in particolare che ciò accade per $z = 5+5i$.

Scegliere da ora in poi $z = 5+5i$ e definire $B = \frac{1}{2}(A - A^*)$.

(B) (4 punti) Trovare gli autovalori di A e una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizza.

(C) (4 punti) Trovare gli autovalori di B e una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizza.

2. Considerare $\alpha(s) = \begin{pmatrix} 3s+s^2 \\ \sin(s) \\ \log(1+s) \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Trovare il più grande insieme $I \subset \mathbb{R}$ su cui la definizione di α ha senso e provare che $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ è una curva semplice e regolare.

(B) (4 punti) Trovare il riferimento di Frénet di α in $s = 0$.

(C) (3 punti) Trovare curvatura e torsione di α in $s = 0$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta x\,\mathrm{d}z$ dove β è la restrizione di α a $[0,1]$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. $\lambda_1 = 3,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \lambda_2 = -4,\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

2. $\pm\frac{1}{\sqrt{86}}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

3. Il punto $[-1 : 2 : 1]$

4. $-1 < t < \frac{1}{2}$ o $t > 2$

5. Paraboloide iperbolico

6. -5 e 0

7. -1

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) $z = 5 + it$ con $t \in \mathbb{R}$

(B) $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 5 + 7i$
$v_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} i-3 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 3-i \\ 5 \end{pmatrix}$

(C) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 7i$, v_1 e v_2 come sopra

2.

(A) $I = (-1, +\infty)$ su cui la terza componente di α è crescente con derivata positiva

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ n = \frac{1}{\sqrt{330}} \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -16 \end{pmatrix},\ b = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{30}}{11\sqrt{11}}, \quad \tau(0) = -\frac{1}{30}$

(D) $\frac{5}{2} - 2\log(2)$