UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 6/7/13 — Quesiti

**Nome** ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

**1.** Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{tr}(A) = -17$ e $\det(A) = 5$,
sapendo che un autovalore di $A$ è $\lambda_1 = -16$ trovare gli altri due $\lambda_{2,3}$.

**2.** Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitarî e ortogonali a $\begin{pmatrix} 3-2i \\ 2+i \end{pmatrix}$.

**3.** Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale con $\det(A) = +1$ e $\operatorname{tr}(A) = 1 + \sqrt{3}$,
descrivere l'azione di $A$ come isometria di $\mathbb{R}^3$.

**4.** Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} k^2 & 0 & k \\ 1+k & 2+k & 1+k \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$.

**5.** Determinare il tipo affine della quadrica $x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz - yz - x + y - 2z = 0$.

**6.** Vedendo $\mathbb{R}^2$ come sottoinsieme di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$,
descrivere l'equazione di una parabola $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ avente il punto all'infinito $[1:2:0]$

**7.** Calcolare $\int_\alpha x^2 y (3y\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y)$ con $\alpha(t) = (t^2 - t - 1, -t^5)$ per $t \in [0,1]$.

**Le risposte devono essere sinteticamente giustificate**

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 6/7/13 — Esercizî

**1.** Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare $A = \begin{pmatrix} 2 & -k^2-k+1 & -k^2-2k+2 \\ 2k-1 & 3k+1 & 2k-1 \\ 0 & k^2-1 & k^2+2k \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Verificare che $\det(A) = 2k^4 + 9k^3 + 12k^2 + 4k$.

(B) (2 punti) Determinare il polinomio caratteristico di $A$ sapendo che vale $-2k^4 - 6k^3 - 2k^2 + 2k$ nel punto 1.

(C) (2 punti) Sapendo che $A$ ha sempre l'autovalore $\lambda_1 = k^2 + 2k$ trovare gli altri due.

(D) (2 punti) Trovare per quali $k$ gli autovalori di $A$ non sono distinti.

(E) (4 punti) Trovare per quali $k$ la $A$ non è diagonalizzabile.

**2.** Considerare $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2+4 \\ t^3 - 6t^2 + 5t - 4 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\alpha$ è semplice.

(B) (2 punti) Provare che $\alpha$ è regolare.

(C) (3 punti) Calcolare la curvatura di $\alpha$ nel punto $t = -1$.

(D) (2 punti) Calcolare $\int_\beta y \, \mathrm{d}x$ dove $\beta$ è la restrizione di $\alpha$ all'intervallo $[0, 1]$.

(E) (3 punti) Calcolare $\int_\gamma e^{xy}(y \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}y)$ dove $\gamma$ è la restrizione di $\alpha$ all'intervallo $[-1, 0]$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

# Risposte

## 5. ♡

**1.** $-\frac{5}{4}$ e $\frac{1}{4}$

**2.** $\frac{e^{i\vartheta}}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i-2 \\ 3+2i \end{pmatrix}$

**3.** Rotazione di angolo $\frac{\pi}{6}$ intorno a una retta

**4.** $k \neq -1$ e $k \neq 2$

**5.** Paraboloide ellittico

**6.** Ad esempio $x = (2x-y)^2$

**7.** $-1$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

# Soluzioni

**1.**

(A) Alla terza colonna sottrarre la prima, poi alla seconda sottrarre la terza, quindi raccogliere $k^2+2k$ dalla terza trovando $(k^2+2k)(2k^2+5k+2)$

(B) $t^3-(k^2+5k+3)t^2+(3k^3+11k^2+11k+2)t-(2k^4+9k^3+12k^2+4k)$

(C) $\lambda_2 = k+2$, $\lambda_3 = 2k+1$

(D) $k=-1$, $k=1$, $k=-2$

(E) $k=1$, $k=-2$

**2.**

(A) Se $s \neq t$ allora $\alpha(s)$ e $\alpha(t)$ hanno prima componente uguale solo se $s=-t$ e $t \neq 0$, ma la seconda componente di $\alpha(-t)$ è sempre diversa da quella di $\alpha(t)$ per $t \neq 0$

(B) La prima componente di $\alpha'(t)$ si annulla solo in $t=0$, ma in $t=0$ la seconda non si annulla

(C) $-\frac{1}{2\sqrt{101^3}}$

(D) $-\frac{49}{15}$

(E) $e^{-16}-e^{-80}$