UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 28/1/13 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Dati 15 generatori di $\left\{x \in \mathbb{R}^9 : \sum_{j=1}^{9} x_j = \sum_{j=1}^{9}(-1)^j x_j = 0\right\}$, quanti bisogna scartarne per ottenere una base?

2. Determinare $[5e_1 - 7e_2]_{\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B} = (3e_1 - 2e_2,\ 4e_1 + e_2)$.

3. Se X e Y sono sottospazî vettoriali di $\mathbb{C}^9$ di dimensioni 3 e 5, e $X \cap Y$ contiene $e_3 - ie_7$, che dimensione può avere $X + Y$?

4. Risolvere $\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - 4y + 2z = 13 \\ 7x + 8y - 8z = -5. \end{cases}$

5. Risolvere $\det \begin{pmatrix} 1-i & 2+i \\ i-z & 1+2i \end{pmatrix} = 0.$

6. Calcolare i determinanti delle orlate di $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & -5 & -1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Data la decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ con $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 7x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(e_1 + e_2 - e_3)$, trovare la proiezione su X di $3e_1 - e_2 - 2e_3$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 28/1/13 — Esercizî

1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare $E_t = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} t+2 \\ 2t+4 \\ 4t+3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ t+3 \\ 2t+3 \end{pmatrix}\right)$.

(A) (3 punti) Trovare $t_0 \in \mathbb{R}$ e $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tali che $\dim(E_{t_0}) = n_0$ mentre $\dim(E_t) = n_1$ per $t \neq t_0$.

(B) (2 punti) Trovare equazioni cartesiane di E_{t_0} e di E_1.

(C) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di $\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ 8x - 4y - z = -22 \end{cases}$ e la posizione rispetto a E_2.

(D) (2 punti) Trovare una base $\mathcal{B}$ della giacitura X di $E_{(-1)}$ della forma $\mathcal{B} = (e_i - e_j,\ e_k)$ con $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ e $i < j$.

(E) (2 punti) Provare che $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + z \\ 2x + 5y - z \\ x - 2y \end{pmatrix}$ definisce $f : X \to X$ e trovare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

2. Considerare l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 5 & -7 & 4 \\ 2 & -4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Calcolare il rango di A e dedurne le dimensioni dell'immagine e del nucleo di f.

(B) (3 punti) Trovare una base di $\mathrm{Ker}(f)$.

(C) (3 punti) Se $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ e $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sono date da $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, esibire la matrice di $k = h \circ f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, provare che k^{-1} esiste ed esibire la sua matrice.

(D) (3 punti) Provare che $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Span}(e_1)$ ed esibire la matrice della proiezione su $\mathrm{Im}(f)$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. 8

2. $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Tra 5 e 7

4. $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 19 \\ 26 \end{pmatrix}$ con $t \in \mathbb{R}$

5. $z = \frac{1}{5}(6i - 7)$

6. 63 e 35

7. $12e_1 + 8e_2 - 11e_3$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) $t_0 = 3$, $n_0 = 1$, $n_1 = 2$

(B) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - z = 1 \end{cases}$ $\qquad x - 4y + 3z = 21$

(C) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ è parallela a E_2

(D) $i = 1$, $j = 3$, $k = 2$

(E) $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

2.

(A) $\mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$

(B) $-2e_1 + e_2 + e_3,\ \ e_1 + e_2 - e_4$

(C) $[k] = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $[k^{-1}] = [k]^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(D) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 22 & 23 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$