UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 15/6/13 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Dati 5 elementi linearmente indipendenti di $\{p(z) \in \mathbb{C}_{\leqslant 7}[z] : \ p'(-i) = 0\}$, quanti bisogna aggiungerne per avere una base?

2. Determinare $[4e_1 + 5e_2]_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = (e_1 - e_2,\ 2e_1 + e_2)$.

3. Se $f : \{x \in \mathbb{R}^5 : \ 7x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_5 = 0\} \to \mathbb{R}^3$ non è surgettiva, che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(f)$?

4. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Stabilire quante sono al variare di $t \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema $\begin{cases} (1-t)x + (1+t)y = 5 - t \\ tx + (t-9)y = -t. \end{cases}$

6. Calcolare $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(-2e_1 + e_2 + e_3)$ calcolare la proiezione su X di $3e_1 + 2e_2 - e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

IN SUPREMÆ DIGNITATIS 1343

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 15/6/13 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tali che

$$f\begin{pmatrix} k \\ 2-3k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -k \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 1-2k \\ k+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k+2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(A) (4 punti) Stabilire per ogni k quante tali f esistono.

(B) (2 punti) Trovare per quali $k \in \mathbb{R}$ la f esiste unica ma non è iniettiva.

(C) (2 punti) Per $k = -1$ trovare $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(D) (4 punti) Per $k = 1$ trovare $[f]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}$.

2. In $\mathbb{R}^3$ considerare

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right), \qquad \ell : \begin{cases} 2x - 5y + 3z = -7 \\ 3x + 4y - 2z = 13. \end{cases}$$

(A) (1 punto) Trovare equazioni parametriche del piano parallelo a P e passante per $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \pi \\ -e \end{pmatrix}$.

(B) (2 punti) Trovare equazioni cartesiane della retta parallela a ℓ e passante per $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

(C) (3 punti) Trovare un'equazione cartesiana di P.

(D) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di ℓ.

(E) (3 punti) Determinare la posizione reciproca di P ed ℓ.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. 2

2. $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Tra 2 e 4

4. 6

5. Infinite per $t = 3$, nessuna per $t = \frac{3}{2}$, una altrimenti

6. $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$

7. $-9e_1 + 8e_2 + 5e_3$

---

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) Infinite per $k = 2$, nessuna per $k = \frac{1}{5}$, una sola altrimenti

(B) $k = -3$

(C) $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

2.

(A) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \pi \\ -e \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$

(B) $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 30 \\ 3x + 4y - 2z = -12 \end{cases}$

(C) $16x - 17y + 13z = 5$

(D) $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ 23 \end{pmatrix}$

(E) Incidenti nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$