UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 8/1/13 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Se sono dati 4 vettori linearmente indipendenti in $\{p(z) \in \mathbb{C}_{\leqslant 8}[z] :\ p'(1+i) = p''(1-i) = 0\}$, quanti se ne devono aggiungere per ottenere una base?

2. Se $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^8$ è lineare e $f(e_1 - 4e_3) = f(e_2 + 3e_4) = 2e_3 + 7e_8$, che dimensione può avere $\mathrm{Im}(f)$?

3. Date le basi $\mathcal{B} = (2e_1 + e_2,\ e_1 + 3e_2)$ e $\mathcal{C} = (4e_1 - e_2, -3e_1 + 2e_2)$ di $\mathbb{R}^2$, se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è lineare e $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, quanto vale $f(e_1 - 2e_2)$?

4. Data $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{3\,2}$.

5. Se di una matrice $A \in \mathcal{M}_{5\times 6}(\mathbb{R})$ si conoscono i determinanti di 7 opportune sottomatrici quadrate, è possibile stabilire quanto vale il rango di A? Spiegare.

6. Trovare le radici complesse di $6z^2 - (2+i)z + 1 + i$.

7. Data la decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ con $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(2e_1 + 4e_2 - e_3)$, determinare l'associata proiezione su X di $-e_1 + e_2 + e_3$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 8/1/13 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare il sottospazî affini

$$E = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

$$F_t : \begin{cases} (1+t)x - 4y + (t-3)z + 6w = 4 \\ (t-4)x + (5+t)y + 3z + (1-10t)w = t-7 \end{cases} \qquad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

(A) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di E.

(B) (3 punti) Trovare $t_0 \in \mathbb{R}$ e $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tali che $\dim(F_{t_0}) = n_0$ e $\dim(F_t) = n_1$ per $t \neq t_0$.

(C) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di F_t per $t = t_0$ e per $t = -1$.

(D) (3 punti) Descrivere la posizione reciproca di E ed F_0.

2. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0\}$,

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(A) (2 punti) Provare che $\mathcal{B}$ è una base di X.

(B) (2 punti) Calcolare il rango di A.

(C) (2 punti) Provare che la formula $f(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione lineare $f : X \to X$.

(D) (3 punti) Determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

(E) (3 punti) Provare che $X = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ e determinare le proiezioni rispetto a tale decomposizione del terzo elemento di $\mathcal{B}$.

Risposte

5. ♡

1. 3

2. Tra 1 e 3

3. $25e_1 - 10e_2$

4. $-\frac{7}{16}$

5. Sì: se si sa che una sottomatrice 3×3 ha determinante non nullo e che le sue $2 \cdot 3 = 6$ orlate 4×4 hanno determinante nullo, si conclude che il rango è 3

6. $z_1 = \frac{1}{2}i,\ z_2 = \frac{1}{3}(1 - i)$

7. $3e_1 + 9e_2 - e_3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $\begin{cases} x-2y-z=9 \\ 13y+3z+w=-22 \end{cases}$

(B) $t_0=1,\ n_0=3,\ n_1=2$

(C) $F_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right);$

$F_{(-1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -31 \\ 34 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

(D) Sono disgiunti e non paralleli; le giaciture si incontrano nella retta generata da $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.

(A) $\mathcal{B}$ contiene 3 vettori linearmente indipendenti che appartengono a X

(B) Tre: A ha determinante nullo ma cancellando prima riga e quarta colonna si ottiene una matrice con determinante non nullo

(C) $(1,\ -1,\ 2,\ 3)\cdot A = 4\cdot(1,\ -1,\ 2,\ 3)$

(D) $\begin{pmatrix} -5 & -4 & -14 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(E) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ si intersecano solo in $\{0\}$;

le proiezioni sono $\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$