Esercizî di Geometria (Petronio 10/11)

18 maggio 2011

Esercizio 1 Al variare di $k \in \mathbb{R}$ determinare il tipo affine della conica $\mathcal{C}_k$ di equazione $x^2 - 2kxy + 4y^2 - 4x + 6y + \frac{13}{3} = 0$. Scelti tre valori k_1, k_2, k_3 per i quali le corrispondenti $\mathcal{C}_k$ siano non degeneri e di tipo affine distinto, per ogni $i \neq j$ descrivere una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $f\left(\widehat{C_{k_i}}\right) = \widehat{C_{k_j}}$.

Esercizio 2. Provare che tagliando il nastro di Möbius a metà lungo la sua curva centrale si ottiene una sola superficie e non due. Che superficie è? E cosa succede facendo due tagli paralleli tra loro e paralleli alla curva centrale?

Esercizio 3. Verificare che la conica affine $\mathcal{C}$ di equazione $8x^2 - 12xy + 17y^2 + 4x - 18y + 4 = 0$ è un'ellisse. Determinare una trasformazione affine f di $\mathbb{R}^2$ che trasformi $\mathcal{C}$ nell'ellisse di equazione $x^2 + y^2 = 1$, e una isometria g di $\mathbb{R}^2$ che trasformi $\mathcal{C}$ in un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > b > 0$, determinando a e b.

Esercizio 4. Determinare i possibili tipi affini di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ definito da un'equazione $(x\ y\ 1) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, con $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ simmetrica avente determinante nullo.

Esercizio 5. Descrivere il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ definito dall'equazione $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 - x^2 + y^2 - x + y + 1 = 0$ e i suoi punti all'infinito.

Esercizio 6. Esibire un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^2$ definito da un'equazione di terzo grado, che abbia tre punti distinti all'infinito e che non contenga alcuna retta.